

FUNCTIONALLY SMALL RIEMANN SUMS (FSRS) DAN ESSENTIALLY SMALL RIEMANN SUMS (ESRS) FUNGSI TERINTEGRAL HENSTOCK-KURZWEIL DARI RUANG EUCLIDE $\mathbb{R}^n$ KE RUANG BARISAN ℓ^p , ($1 \leq p < \infty$)

Aniswita¹

Abstract: In this paper we discuss Functionally Small Riemann Sums (FSRS) properties and Essentially Small Riemann Sums (ESRS) properties for Henstock-Kurzweil integrable functions from the Euclidean spaces $\mathbb{R}^n$ into the Sequences space ℓ^p , ($1 \leq p < \infty$)

Keywords: *Henstock integrable functions; Euclidean spaces; FSRS; ESRS*

A. PENDAHULUAN

Pada tahun 1960, Henstock dan Kurzweil secara terpisah mengitlakan integral Riemann dengan mengubah konstanta δ menjadi fungsi positif δ dan ternyata integral yang mereka susun ekuivalen. Oleh karena itu integral tersebut dikenal dengan integral Henstock-Kurzweil atau integral Riemann yang diperluas (Gordon, 1994).

Integral ini mendapat perhatian yang sangat besar dari para peneliti, berbagai penelitian dilakukan untuk menggali sifat-sifat dan aplikasinya. Diantara sifat tersebut adalah sifat *Functionally Small Riemann Sums* (FSRS) dan *Essentially Small Riemann Sums* (ESRS). Pengertian FSRS untuk fungsi bernilai Real pada himpunan bilangan Real yang terintegral Henstock diberikan dan dibuktikan oleh Lee (1990). Kemudian tahun 1995 Darmawijaya mengembangkan sifat FSRS ke ESRS untuk integral Henstock pada $[a, b]$. Indrati (2002) mengitlakkanya untuk fungsi bernilai real pada ruang Euclide berdimensi n , kemudian Suherman

¹ Sekolah Tinggi Agama Islam Negeri Bukittinggi Padang Sumatera Utara, Indonesia

(2003) mengembangkannya untuk fungsi bernilai vektor pada ruang Euclide berdimensi n .

Berdasarkan uraian di atas akan diselidiki apakah sifat FSRS dan ESRS masih berlaku untuk fungsi yang terintegral Henstock dari ruang Euclide $\mathfrak{R}^n$ ke ruang barisan ℓ^p , ($1 \leq p < \infty$).

Himpunan semua bilangan real dinotasikan dengan $\mathfrak{R}$. Untuk bilangan asli n , $\mathfrak{R}^n$ menyatakan himpunan semua pasangan atas n bilangan real, yaitu

$$\mathfrak{R}^n = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \dots \times \mathfrak{R} \text{ (n factor)} = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathfrak{R} \text{ dan } 1 \leq i \leq n\}.$$

Untuk titik $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$, persekitaran (neighborhood) titik $\bar{x}$ dengan jari-jari $r > 0$, dinotasikan dengan $B(\bar{x}, r)$ dan didefinisikan

$$B(\bar{x}, r) = \{\bar{y} : \bar{y} \in \mathfrak{R}^n \text{ dan } \|\bar{x} - \bar{y}\|_\infty < r\}.$$

Untuk ($1 \leq p < \infty$), ℓ^p merupakan koleksi semua barisan $\bar{x} = \{x_k\} \in W$

sehingga $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ atau ditulis,

$$\ell^p = \left\{ \bar{x} = \{x_k\} \in W, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}. \text{ (Kreyszig, 1978).}$$

Perlu diperhatikan bahwa fungsi $\bar{f} : E \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \ell^p$ merupakan barisan fungsi $\{f_k\}$ dengan $f_k : E \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, untuk setiap k ($k = 1, 2, 3, \dots$) sehingga $\bar{f}(\bar{x}) = \{f_k(\bar{x})\} \in \ell^p$ untuk setiap $\bar{x} \in E$. Berikut diberikan definisi, sifat dasar dan sifat lanjut dari integral Henstock dari ruang Euclide $\mathfrak{R}^n$ ke ruang barisan ℓ^p , ($1 \leq p < \infty$).

Definisi 1. Diberikan fungsi volume α pada $\mathfrak{R}^n$ dan $E \subset \mathfrak{R}^n$ sel. Fungsi $\bar{f} : E \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \ell^p$ dikatakan terintegral Henstock pada E , ditulis dengan $\bar{f} \in R^*(E, \ell^p, \alpha)$ jika terdapat $\bar{a} = \{a_k\} \in \ell^p$ dengan sifat untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\} = \{(D_i, \bar{x}_i) : i = 1, 2, \dots, r\}$ pada E berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - \bar{a} \right\|_p = \left\| \sum_{i=1}^r \bar{f}(\bar{x}_i) \alpha(D_i) - \bar{a} \right\|_p < \varepsilon.$$

Selanjutnya nilai $\bar{a} = \{a_k\} \in \ell^p$ yang dimaksud di atas disebut nilai integral- α Henstock fungsi $\bar{f}$ pada E di tulis dengan $\bar{a} = (R^*) \int_E \bar{f} d\alpha$.

Definisi 2. Diberikan fungsi volume α pada $\mathfrak{R}^n$, $E \subset \mathfrak{R}^n$ sel, dan fungsi $f_k : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ untuk setiap k , ($k=1,2, \dots$). Barisan fungsi $\{f_k\}$ dikatakan terintegral- α Henstock serentak (Henstock Equi α -integrable) pada E dengan F_k sebagai primitifnya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{D, \bar{x}\}$ pada E berlaku

$$\left| \left(\mathcal{D} \right) \sum f_k(\bar{x}) \alpha(D) - F_k(E) \right| < \varepsilon, \text{ untuk setiap } k.$$

Teorema 3. (Kriteria Cauchy) Diberikan fungsi volume α pada $\mathfrak{R}^n$ dan $E \subset \mathfrak{R}^n$ sel. Fungsi $\bar{f} \in R^*(E, \ell^p, \alpha)$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap dua partisi $\mathcal{D}_1 = \{D_1, \bar{x}\}$ dan $\mathcal{D}_2 = \{D_2, \bar{x}\}$ pada E berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D}_1 \right) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D_1) - \left(\mathcal{D}_2 \right) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D_2) \right\|_p < \varepsilon.$$

Teorema 4. (Lemma Henstock) Diberikan fungsi volume α pada $\mathfrak{R}^n$ dan sel $E \subset \mathfrak{R}^n$. Jika $\bar{f} \in R^*(E, \ell^p, \alpha)$ dengan $\bar{F}$ sebagai primitifnya, yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{D, \bar{x}\}$ pada E berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - \bar{F}(E) \right\|_p < \varepsilon, \text{ maka untuk setiap jumlah}$$

bagian $\sum_1$ dari $\left(\mathcal{D} \right) \sum$ berlaku $\left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum_1 \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - \bar{F}(E) \right\|_p < 2\varepsilon$.

Teorema 5. (Peluasan Harnack) Diberikan fungsi volume α pada $\mathfrak{R}^n$, sel $E \subset \mathfrak{R}^n$, dan fungsi $\bar{f} : E \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \ell^p$. Himpunan X merupakan himpunan tertutup di dalam E dan $\{E_i\}$ merupakan barisan himpunan tertutup sederhana yang tidak saling tumpang-tindih dengan

$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E \setminus X$. Jika $\bar{f} \in R^*(X, \ell^p, \alpha)$ dan $\bar{f} \in R^*(E_i, \ell^p, \alpha)$, untuk setiap i dengan $\left\| \sum_{i=1}^{\infty} (R^*) \int_{E_i} \bar{f} d\alpha \right\|_p < \infty$ maka $\bar{f} \in R^*(E, \ell^p, \alpha)$ dan $(R^*) \int_E \bar{f} d\alpha = (R^*) \int_X \bar{f} \chi_X d\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} (R^*) \int_{E_i} \bar{f} d\alpha$.

Akibat 6. (Sifat Cauchy) Diberikan fungsi volume α pada $\mathfrak{R}^n$, sel $E \subset \mathfrak{R}^n$, dan fungsi $\bar{f} : E \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \ell^p$. Barisan $\{E_i\}$ merupakan barisan himpunan sederhana yang tidak saling tumpang-tindih dengan $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E^0$, dengan E^0 menyatakan himpunan titik-dalam (interior point) sel E . Jika $\bar{f} \in R^*(E_i, \ell^p, \alpha)$, untuk setiap i dengan $\left\| \sum_{i=1}^{\infty} (R^*) \int_{E_i} \bar{f} d\alpha \right\|_p < \infty$ maka $\bar{f} \in R^*(E, \ell^p, \alpha)$ dan $(R^*) \int_E \bar{f} d\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} (R^*) \int_{E_i} \bar{f} d\alpha$

B. PEMBAHASAN

Berikut dibahas definisi fungsi dari ruang Euclide $\mathfrak{R}^n$ ke ruang barisan ℓ^p , ($1 \leq p < \infty$) yang memiliki sifat FSRS dan ESRS serta beberapa teorema yang terkait dengan sifat FSRS dan ESRS.

1. Functionally Small Riemann Sums (FSRS)

Pembahasan sifat *Functionally Small Riemann Sums* pada integral Henstock dihubungkan dengan fungsi non negatif yang terintegral Lebesgue pada sel $E \subset \mathfrak{R}^n$. Untuk memudahkan pembahasan selanjutnya terlebih dahulu diberikan Teorema 7 di bawah ini.

Teorema 7. Diberikan fungsi volume α pada $\mathfrak{R}^n$ dan sel $E \subset \mathfrak{R}^n$. Jika fungsi $\bar{f}$ terintegral Henstock pada sel $E \subset \mathfrak{R}^n$ maka terdapat barisan

himpunan tertutup $\{E_k\}$, dengan $E_k \subseteq E_{k+1}$, $E = \bigcup E_k$ dan $\bar{f}$ terintegral Lebesgue pada E_k untuk setiap k , ($k=1, 2, \dots$)

Bukti

Fungsi $\bar{F}$ menyatakan primitif integral Henstock fungsi $\bar{f}$ pada sel E , maka $\bar{F} \in C(E)$ dan $\bar{F} \in ACG^*(E)$. Berarti terdapat barisan himpunan tertutup $\{E_k\}$, dengan, $E = \bigcup E_k$ dan $\bar{F} \in AC^*(E_k)$ untuk setiap E_k . Hal ini berakibat $\bar{F} \in AC(E_k)$ untuk setiap E_k , sehingga diperoleh $\bar{F} \in BV(E_k)$ untuk setiap k . Lebih lanjut diperoleh $\bar{F}'(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x})$ hampir dimana-mana pada E_k untuk setiap k . Jadi $\bar{f}$ terintegral Lebesgue pada E_k untuk setiap k .

Sebelum membahas lebih lanjut, perlu diperhatikan bahwa, fungsi $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots): E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \ell^p$ terintegral Henstock mutlak pada sel $E \subset \mathbb{R}^n$ jika fungsi $\bar{f}$ dan $|\bar{f}|$ (mutlaknya) terintegral Henstock pada sel $E \subset \mathbb{R}^n$.

Perlu juga diingat bahwa fungsi $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots): E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \ell^p$ terintegral Lebesgue pada sel $E \subset \mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika fungsi $\bar{f}$ terintegral Henstock mutlak pada sel $E \subset \mathbb{R}^n$.

Selanjutnya diberikan definisi fungsi yang mempunyai sifat *Functionally Small Riemann Sums* (FSRS) pada sel $E \subset \mathbb{R}^n$.

Definisi 8. Diberikan fungsi volume α pada $\mathbb{R}^n$, sel $E \subset \mathbb{R}^n$ dan fungsi $\bar{f}: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \ell^p$ terukur- α . Fungsi $\bar{f}$ dikatakan mempunyai sifat *Functionally Small Riemann Sums* (FSRS) terhadap α pada sel E ditulis dengan $\bar{f} \in \text{FSRS}(E, \ell^p, \alpha)$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi tak negatif $\bar{g}$ terintegral Lebesgue pada E dan fungsi positif δ pada E dengan sifat untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada sel E berlaku

$$\left\| (\mathcal{D}) \sum_{|\bar{f}(\bar{x})| > \bar{g}(\bar{x})} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p < \varepsilon.$$

Teorema 9 dibawah ini memberikan karakteristik integral Henstock di dalam sifat FSRS.

Teorema 9. Fungsi $\bar{f}$ terintegral Henstock pada sel $E \subset \mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika fungsi $\bar{f}$ bersifat FSRS pada sel E .

Bukti:

(Syarat cukup) Fungsi $\bar{f}$ bersifat FSRS pada sel E maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi tak negatif $\bar{g}$ yang terintegral Lebesgue dan fungsi positif δ_1 pada E dengan sifat untuk setiap partisi Perron δ_1 -fine $\mathcal{D} = \{D, \bar{x}\}$ pada sel E berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum_{\bar{f}(\bar{x}) > \bar{g}(\bar{x})} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Kemudian didefinisikan fungsi $\bar{h}(\bar{x})$ dengan

$$\bar{h}(\bar{x}) = \begin{cases} \bar{f}(\bar{x}), & \text{untuk } |\bar{f}(\bar{x})| \leq \bar{g}(\bar{x}) \\ 0, & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Fungsi $\bar{h}$ terukur dan terdominasi oleh fungsi $\bar{g}$ pada sel E . Diketahui $\bar{g}$ terintegral Lebesgue pada sel E maka $\bar{h}$ juga terintegral Lebesgue pada sel E . Akibatnya, fungsi $\bar{h}$ terintegral Henstock mutlak pada sel E , sehingga terdapat fungsi positif δ_2 pada sel E dengan sifat untuk setiap partisi Perron δ_2 -fine $\mathcal{D}_1$ dan $\mathcal{D}_2$ pada E berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D}_1 \right) \sum \bar{h}(\bar{x}) \alpha(D_1) - \left(\mathcal{D}_2 \right) \sum \bar{h}(\bar{x}) \alpha(D_2) \right\|_p < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Diambil fungsi positif δ dengan rumus $\delta(\bar{x}) = \min \{ \delta_1(\bar{x}), \delta_2(\bar{x}) \}$ sehingga untuk sebarang dua partisi Perron δ -fine $\mathcal{D}^1$ dan $\mathcal{D}^2$ pada sel E berlaku

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mathcal{D}^1 \right) \sum \bar{h}(\bar{x}) \alpha(D_1) - \left(\mathcal{D}^2 \right) \sum \bar{h}(\bar{x}) \alpha(D_2) \right\|_p &\leq \\ &\leq \left\| \left(\mathcal{D}^1 \right) \sum_{\bar{f}(\bar{x}) > \bar{g}(\bar{x})} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p + \\ &\left\| \left(\mathcal{D}^2 \right) \sum_{\bar{f}(\bar{x}) > \bar{g}(\bar{x})} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \\
 & \left\| \left(\mathcal{D}^1 \right) \sum_{\bar{f}(\bar{x}) \leq g(\bar{x})} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - \left(\mathcal{D}^2 \right) \sum_{\bar{f}(\bar{x}) \leq g(\bar{x})} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p \\
 & < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \\
 & \left\| \left(\mathcal{D}_1 \right) \sum \bar{h}(\bar{x}) \alpha(D_1) - \left(\mathcal{D}_2 \right) \sum \bar{h}(\bar{x}) \alpha(D_2) \right\|_p < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria Cauchy fungsi $\bar{f}$ terintegral Henstock pada sel $E \subset \mathfrak{R}^n$.

(Syarat perlu) Diketahui fungsi $\bar{f}$ terintegral Henstock pada sel $E \subset \mathfrak{R}^n$ maka $\bar{f}$ terukur pada sel E . Menurut Teorema 7 terdapat barisan himpunan tertutup $\{E_k\}$ dengan $E_k \subseteq E_{k+1}$ dan fungsi $\bar{f}$ terintegral Lebesgue pada E_k untuk setiap k . Selanjutnya didefinisikan fungsi

$$\bar{f}_k(\bar{x}) = \begin{cases} \bar{f}(\bar{x}), & \text{untuk setiap } \bar{x} \in E_k \\ \bar{0}, & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Untuk setiap k , fungsi $\bar{f}_k$ terintegral Henstock pada sel E sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan positif k_0 dengan sifat untuk setiap $k \geq k_0$ berlaku

$$\left\| \left(R^* \right) \int_E \bar{f} d\alpha - \left(R^* \right) \int_{E_k} \bar{f} d\alpha \right\|_p < \varepsilon.$$

Di lain pihak karena untuk setiap k , terdapat fungsi positif δ_k pada sel E dengan sifat untuk setiap partisi Perron δ_k -fine $\mathcal{D}$ pada E berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) - \left(R^* \right) \int_E \bar{f}_k d\alpha \right\|_p < \varepsilon.$$

Fungsi $\bar{f}$ terintegral Henstock pada sel E sehingga terdapat fungsi positif δ_0 pada sel E dengan sifat untuk setiap partisi Perron δ_0 -fine $\mathcal{D}_1$ pada E berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D}_1 \right) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - \left(R^* \right) \int_E \bar{f} d\alpha \right\|_p < \varepsilon.$$

Didefinisikan fungsi nonnegatif $\bar{g}$ dengan $\bar{g}(\bar{x}) = |\bar{f}_{k_0}|(\bar{x})$. Karena $\bar{g}$ nonnegatif dan terukur pada sel E maka $\bar{g}$ terintegral Lebesgue pada sel E . Selanjutnya diambil $\delta(\bar{x}) = \min \{ \delta_0(\bar{x}), \delta_{k_0}(\bar{x}) \}$ maka untuk setiap Partisi Perron δ -fine $\mathcal{D}^1$ pada E berlaku

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum_{|\bar{f}(\bar{x}) > \bar{g}(\bar{x})} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p &= \left\| \left(\mathcal{D}^1 \right) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - \left(\mathcal{D}^1 \right) \sum_{|\bar{f}(\bar{x}) \leq \bar{g}(\bar{x})} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p \\ &\leq \left\| \left(\mathcal{D}^1 \right) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - (R^*) \int_E \bar{f} d\alpha \right\|_p + \\ &\left\| (R^*) \int_E \bar{f} d\alpha - (R^*) \int_E \bar{f}_{k_0} d\alpha \right\|_p \\ &\quad + \left\| (R^*) \int_E \bar{f}_{k_0} - \left(\mathcal{D}^1 \right) \sum_{\bar{x} \in E_{k_0}} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \left\| (R^*) \int_E \bar{g} d\alpha - \sum \bar{g}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p < 3\varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Dengan demikian menurut Teorema 9 di atas terdapat adanya ekuivalensi antara fungsi yang terintegral Henstock dengan fungsi yang mempunyai sifat FSRS.

2. Essentially Small Riemann Sums (ESRS)

Sifat ESRS menyatakan bahwa fungsi terintegral Henstock pada sel E dapat didekati dengan fungsi terintegral Lebesgue pada sel E . Sifat ini memperlemah syarat fungsi terintegral Lebesgue di dalam sifat FSRS yang merupakan fungsi tak negatif.

Definisi 10. Diberikan fungsi volume α pada $\mathfrak{R}^n$, sel $E \subset \mathfrak{R}^n$ dan fungsi $\bar{f} : E \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \ell^p$ terukur- α pada sel E . Fungsi $\bar{f}$ dikatakan mempunyai sifat Essentially Small Riemann Sums (ESRS) terhadap α pada sel E ditulis dengan $\bar{f} \in \text{ESRS}(E, \ell^p, \alpha)$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi terintegral Lebesgue $\bar{g}$ dan fungsi positif δ pada E dengan sifat untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{ \langle D, \bar{x} \rangle \}$ pada sel E berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum_{\bar{f}(\bar{x}) \neq \bar{g}(\bar{x})} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p < \varepsilon.$$

Teorema 11 dibawah ini memberikan karakteristik integral Henstock di dalam sifat ESRS.

Teorema 11. Fungsi $\bar{f}$ terintegral Henstock pada sel $E \subset \mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika fungsi $\bar{f}$ bersifat ESRS pada sel E .

Bukti:

(Syarat Perlu) Diketahui $\bar{f}$ terintegral Henstock pada sel $E \subset \mathbb{R}^n$ maka berdasarkan Teorema 9 $\bar{f}$ bersifat FSRS pada sel E dengan kata lain untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi tak negatif $\bar{g}$ yang terintegral Lebesgue dan fungsi positif δ pada E dengan sifat untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{D, \bar{x}\}$ pada sel E berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum_{|\bar{f}(\bar{x})| > \bar{g}(\bar{x})} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p < \varepsilon.$$

Definisikan fungsi $\bar{h}$ dengan rumus

$$\bar{h}(\bar{x}) = \begin{cases} \bar{f}(\bar{x}), & \text{untuk } |\bar{f}(\bar{x})| \leq \bar{g}(\bar{x}) \\ 0, & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Fungsi $\bar{h}$ terintegral Lebesgue pada sel E , akibatnya untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{D, \bar{x}\}$ pada sel E berlaku

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum_{\bar{f}(\bar{x}) \neq \bar{h}(\bar{x})} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p &= \left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum_{|\bar{f}(\bar{x})| \neq |\bar{h}(\bar{x})|} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p = \\ \left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum_{|\bar{f}(\bar{x})| > \bar{g}(\bar{x})} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Dengan kata lain terbukti $\bar{f}$ bersifat ESRS pada sel E .

(Syarat cukup) Fungsi $\bar{f}$ bersifat ESRS pada sel E berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi terintegral Lebesgue $\bar{g}$ dan fungsi positif δ_* pada E dengan sifat untuk setiap partisi Perron δ_* -fine $\mathcal{D}_* = \{D, \bar{x}\}$ pada sel E berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D}_* \right) \sum_{\bar{f}(\bar{x}) \neq \bar{g}(\bar{x})} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p < \varepsilon.$$

Fungsi $\bar{g}$ terintegral Lebesgue pada sel E maka terdapat fungsi positif δ^* pada E dengan sifat untuk setiap dua partisi Perron δ^* -fine $\mathcal{D}_1^*$ dan $\mathcal{D}_2^*$ pada sel E berlaku

$$\left\| (\mathcal{D}_1^*) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - (\mathcal{D}_2^*) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\| < \varepsilon.$$

Diambil fungsi positif δ dengan rumus $\delta(\bar{x}) = \min \{ \delta_*(\bar{x}), \delta^*(\bar{x}) \}$, akibatnya untuk setiap dua partisi Perron δ -fine $\mathcal{D}_1$ dan $\mathcal{D}_2$ pada sel E berlaku

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathcal{D}_1) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - (\mathcal{D}_2) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\| \leq \\ & \leq \left\| (\mathcal{D}_1) \sum_{\bar{f}(\bar{x}) \neq \bar{g}(\bar{x})} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p + \left\| (\mathcal{D}_2) \sum_{\bar{f}(\bar{x}) \neq \bar{g}(\bar{x})} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p \\ & \quad + \\ & \quad \left\| (\mathcal{D}_1) \sum_{\bar{f}(\bar{x}) = \bar{g}(\bar{x})} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - (\mathcal{D}_2) \sum_{\bar{f}(\bar{x}) = \bar{g}(\bar{x})} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p \\ & < \varepsilon + \varepsilon + \\ & \left\| (\mathcal{D}_1) \sum \bar{g}(\bar{x}) \alpha(D) - (\mathcal{D}_2) \sum \bar{g}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p \\ & < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria Cauchy $\bar{f}$ terintegral Henstock pada sel E . $\square$

Dengan demikian menurut Teorema 11 di atas terdapat adanya ekuivalensi antara fungsi yang terintegral Henstock dengan fungsi yang mempunyai sifat ESRS.

C. SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa sifat FSRS dan ESRS masih berlaku untuk fungsi yang terintegral Henstock dari ruang Euclidean $\mathbb{R}^n$ ke ruang barisan ℓ^p , ($1 \leq p < \infty$).

Permasalahan-permasalahan lain yang perlu dikembangkan antara lain kajian mengenai teorema kekonvergenan *Small Riemann Sums* fungsi

yang terintegral Henstock dari ruang Euclide $\mathfrak{R}^n$ ke ruang Barisan ℓ^p , ($1 \leq p < \infty$) serta aplikasinya pada disiplin ilmu lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Gordon, R. A. (1994). *The integral of lebesgue, denjoy, perron and henstock*. USA : American Mathematical Society.
- Indrati, Ch. R. (2002). *Integral Henstock-Kurzweil di dalam ruang euclide berdimensi- n*. Disertasi. Universitas Gadjah Mada, Indonesia
- Kreyszig, E. (1978). *Introduction functional analysis with application*. John Wiley and Sons
- Lee, P. Y. (1989). *Lanzhou lectures on henstock integration*. Singapore: Word Scientific.
- Pfeffer, W. F. (1993). *The Riemann approach to integration*. New York: Cambridge University Press.
- Royden, H. L. (1989). *Real Analysis*, third edition. New York: Macmillan Publishing Company.