

## ANALISIS TITIK EKUILIBRIUM MODEL EPIDEMI SIR DENGAN EFEK DEMOGRAFI

Nurul Hikmah<sup>1</sup>

**Abstract:** In this paper, we consider a SIR epidemic model with demographic effects. By carrying out a global analysis of the model and studying the locally stability of the equilibrium in this paper, and make some predictions implied by this model about some qualitative aspects of the spread of a disease, we show that the equilibrium of a SIR epidemic model is locally asymptotically stable.

**Keywords:** SIR; *Equilibrium Point*; *Stability*

---

### A. PENDAHULUAN

Model Epidemi SIR pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 dengan menggunakan laju penularan bilinear yaitu linear dalam  $IS$  berbentuk  $\beta IS$ , dimana  $\beta$  menyatakan laju kontak perkapita,  $I$  menyatakan jumlah individu terinfeksi, dan  $S$  menyatakan jumlah individu yang rentan. Kelemahan model tersebut adalah dengan diasumsikannya bahwa skala waktu demografi sangat kecil sehingga efek demografi dapat diabaikan. Selanjutnya tahun 1929 Soper menyempurnakan model tersebut dengan memasukkan laju kelahiran pada kelas rentan dan laju kematian pada kelas sembuh. Model tersebut tentu saja tidak sesuai secara biologi karena tidak adanya laju kematian alami dari setiap kelasnya[1].

Pada tahun 1932, Kermack dan Mnkdrick menyempurnakan model epidemi SIR dengan memasukkan kelahiran pada kelas rentan yang sebanding dengan total populasi. Laju kematian pada setiap kelas sebanding dengan jumlah individu di setiap kelasnya. Model tersebut menggambarkan pertumbuhan populasi berkembang secara eksponensial,

---

<sup>1</sup> Universitas Mataram, Jl. Majapahit No.62, Mataram, Indonesia, [nurul23483@yahoo.co.id](mailto:nurul23483@yahoo.co.id)

dengan laju kelahiran dan kematian yang tidak sama. Kemudian Hethcote (1976) memformulasikan model SIR dengan asumsi bahwa ukuran populasi total bernilai konstan dengan laju kematian dan kelahiran yang sama.

Dalam paper ini, peneliti akan memasukkan efek demografi berupa kelahiran dan kematian pada model epidemi SIR dengan asumsi bahwa penyakit tersebut bersifat fatal sehingga individu yang terinfeksi bisa mengalami kematian akibat penyakit tersebut. Selanjutnya akan diselidiki sifat-sifat dinamik dari model tersebut dan dilakukan analisis secara kualitatif sehingga menghasilkan beberapa prediksi akibat dari model antara lain kelompok imunitas, rata-rata umur infeksi dan periode interepidemi.

## B. PEMBAHASAN

### 1. Model Epidemi SIR

Dalam model epidemi SIR populasi dibagi menjadi 3 kelas yaitu kelas rentan (S), kelas terinfeksi (I), dan kelas sembuh (R). Model ini diterapkan pada penyakit yang memiliki masa inkubasi cukup singkat dan berakibat fatal. Individu yang terinfeksi dapat mengalami kematian akibat penyakit tersebut.

Model tersebut dapat disajikan dalam sistem persamaan diferensial tak linier orde satu yang berdimensi 3 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu K - \beta SI - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \mu I - \alpha I - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R.\end{aligned}\tag{1}$$

dengan  $\mu K$  menyatakan jumlah individu lahir yang bernilai konstan,  $\mu$  menyatakan laju kematian alami,  $\alpha$  menyatakan proporsi individu terinfeksi yang mengalami kematian akibat penyakit,  $\gamma$  menyatakan proporsi individu yang diberikan imunitas dan  $K$  menyatakan kapasitas maksimal populasi.

Misalkan populasi berubah menurut waktu yaitu  $S(t)$ ,  $I(t)$  dan  $R(t)$ , maka

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t).$$

Berdasarkan model (1) diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt}.$$

Persamaan diatas menyatakan laju populasi total yang memenuhi persamaan diferensial

$$\frac{dN}{dt} = \mu K - \mu N - \alpha I.$$

Dengan mengambil  $R(t) = N(t) - S(t) - I(t)$ , maka model (1) dapat direduksi menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu K - \beta SI - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \mu I - \alpha I - \gamma I, \end{aligned} \tag{2}$$

Selanjutnya, pada paper ini akan dibahas tentang eksistensi dan kestabilan dari sistem (2) dan akan di analisis secara kualitatif beberapa prediksi akibat dari model.

**2. Eksistensi dan Kestabilan Titik Ekuilibrium Model Epidemii SIR**

Sistem (2) memiliki sebuah titik ekuilibrium bebas penyakit  $P_0(I^*, 0)$ .

Titik tersebut diperoleh dengan mencari solusi  $(\frac{dS}{dt}, \frac{dI}{dt}) = 0$ , yaitu:

a. Titik ekuilibrium bebas penyakit

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu K - \beta SI - \mu S = 0 \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \mu I - \alpha I - \gamma I = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Dari persamaan (3) diperoleh

$$\begin{aligned} \beta SI - \mu I - \alpha I - \gamma I &= 0, \\ \Leftrightarrow I(\beta S - \mu - \alpha - \gamma) &= 0, \\ \Leftrightarrow I = 0 \text{ atau } S &= \frac{\mu - \alpha - \gamma}{\beta}. \end{aligned} \tag{4}$$

Berdasarkan persamaan (3) dan (4) diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu saat  $I = 0$ , maka  $S = K$ . Jadi titik ekuilibrium bebas penyakit dari sistem (2) adalah  $P_0(K, 0)$ .

b. Titik ekuilibrium endemik

Berdasarkan (3) diperoleh titik ekuilibrium endemik pada saat  $I \neq 0$ , maka

$S = \frac{\mu - \alpha - \gamma}{\beta}$ . Jadi diperoleh titik ekuilibrium endemiknya adalah

$$(S, I) = \left( \frac{\mu - \alpha - \gamma}{\beta}, \frac{\mu K}{\mu + \alpha + \gamma} - \frac{\mu}{\beta} \right) = P^*(S^*, I^*)$$

Didefinisikan angka reproduksi dasar[2]

$$R_0 = \frac{\beta K}{\mu + \alpha + \gamma} = \frac{K}{S^*} \tag{5}$$

## 2.1 Sifat kestabilan lokal titik ekuilibrium

**Proposisi 1.** Jika  $R_0 < 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit  $P_0(K, 0)$  sistem (2) stabil asimtotik lokal.

**Bukti.** Matriks Jacobian dari sistem (2) di titik  $P_0(K, 0)$  adalah

$$Df(K, 0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta K \\ 0 & \beta K - \mu - \gamma - \alpha \end{bmatrix}$$

Dari matriks Jacobian di atas diperoleh persamaan karakteristik  $(\lambda + \mu)(\lambda - \beta K - \mu - \gamma - \alpha) = 0$ .

Berdasarkan persamaan karakteristik di atas diperoleh nilai eigen  $\lambda = -\mu$  dan  $\lambda = \beta K - \mu - \gamma - \alpha$ . Dengan demikian untuk  $R_0 > 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit  $P_0(K, 0)$  sistem (2) stabil asimtotik lokal.

Selanjutnya akan dibahas tentang kestabilan lokal titik ekuilibrium endemiknya.

**Proposisi 2.** Jika  $R_0 > 1$  maka titik ekuilibrium endemik  $P^*(S^*, I^*)$  sistem (2) stabil asimtotik lokal.

**Bukti.** Matriks Jacobian dari sistem (2) di titik  $P^*(S^*, I^*)$  adalah

$$Df(S^*, I^*) = \begin{bmatrix} -\beta I^* - \mu & -\beta S^* \\ \beta I^* & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks Jacobian di atas memiliki determinan bernilai positif dan trace yang bernilai negative untuk  $R_0 > 1$ . Dengan demikian untuk  $R_0 > 1$  maka titik ekuilibrium endemik  $P^*(S^*, I^*)$  sistem (2) stabil asimtotik lokal.

## 2.2 Aspek Kualitaitaif Penyebaran Penyakit

Beberapa prediksi akibat model berdasarkan aspek kualitatif penyebaran penyakitnya antara lain:

### a. Kelompok Imunitas

Imunisasi adalah suatu metode yang biasa digunakan untuk mengontrol suatu penyakit, misalnya hepatitis, campak, influenza, dan lainnya agar tidak terjadi endemik.. Berdasarkan hasil klinis dari Teitelbaum dan Edmunds (1999)[1] menunjukkan bahwa vaksin hanya memberikan imunitas sementara terhadap suatu penyakit. Jika fraksi  $p$  dari jumlah kelahiran baru  $\mu K$  pada populasi sukses di imunisasi, maka  $K$  berubah menjadi  $K(1 - p)$ , akibatnya

angka reproduksi dasarnya menjadi  $R_0(1 - p) < 1$  atau  $p > 1 - \frac{1}{R_0}$ .

Suatu populasi dikatakan memiliki kelompok imunitas jika sebagian besar populasi telah di imunisasi untuk meyakinkan bahwa penyakit tidak menjadi endemik. Pemusnahan penyakit campak telah intensif dilakukan dengan adanya kampanye vaksinasi di seluruh Negara[6].

b. Umur infeksi

Untuk menghitung angka reproduksi dasar  $R_0$ , dibutuhkan nilai-nilai dari parameter  $\beta, \mu, \gamma$ , dan  $\alpha$ . Parameter-parameter tersebut dapat diperoleh melalui eksperimen, akan tetapi kita sedikit kesulitan untuk menentukan laju kontak perkapita  $\beta$ . Secara tidak langsung  $R_0$  dapat di estimasi melalui bentuk harapan hidup dan umur rata-rata infeksi.

Jika  $t_0$  menyatakan kelompok umur dari anggota populasi yang baru lahir pada satuan waktu dan  $a$  menyatakan umur dari anggota kelompok, selanjutnya  $y(a)$  menyatakan fraksi dari anggota yang bertahan hingga mencapai umur  $a$ , dan  $\mu$  bagian dari populasi yang mengalami kematian persatuan waktu, maka diperoleh

$$y'(a) = -\mu y(a)$$

Untuk  $y(0) = 1$ , diperoleh solusi dari persamaan di atas yaitu  $y(a) = e^{-\mu a}$ . Secara eksak bagian dari populasi yang mencapai umur  $a$  dan mengalami kematian adalah  $-y'(a) = \mu y(a)$

Persamaan tersebut di integrasikan kedua ruasnya diperoleh harapan hidup

$$\int_0^\infty a[-y'(a)]da = \int_0^\infty y(a)da$$

Karena  $y(a) = e^{-\mu a}$ , maka jika harapan hidup dinotasikan dengan  $L$ , diperoleh  $L = \frac{1}{\mu}$ . Laju populasi dari anggota yang rentan menjadi terinfeksi dengan umur  $a$  dan waktu  $t_0 + a$  adalah  $\beta I(t_0 + a)$ . Akibatnya bagian dari populasi berumur  $a$  yang masih hidup dan masuk kelas rentan dinyatakan dengan  $z(a)$  dan

$$z'(a) = -[\mu + \beta I(t_0)]z(a),$$

dengan solusinya sebagai berikut

$$z(a) = e^{-[\mu\alpha + \int_0^a \beta I(t_0+b)db]} = y(a)e^{-\int_0^a \beta I(t_0+b)db}.$$

Dengan demikian diperoleh rata-rata umur infeksi yang dinotasikan dengan A adalah

$$A = \int_0^\infty e^{-\beta I^* a} da = \frac{1}{\beta I^*}.$$

Berdasarkan titik ekuilibrium endemik  $(S^*, I^*) = \left(\frac{\mu - \alpha - \gamma}{\beta}, \frac{\mu K}{\mu + \alpha + \gamma} - \frac{\mu}{\beta}\right)$ , diperoleh

$$\frac{L}{A} = \frac{\beta I^*}{\mu} = R_0 - 1.$$

Kesamaan di atas sangat berguna dalam mengestimasi angka reproduksi dasar. Sebagai contohnya adalah saat terjadinya urbanisasi di Inggris dan Wales pada tahun 1956 dan 1969, rata-rata umur kontraksi dari campak adalah 4,8 tahun. Jika harapan hidup di asumsikan 70 tahun maka diperoleh  $R_0 = 15,6$  .[1]

### 2.3 Periode Interepidemi

Dari model (2) dan titik ekuilibrium endemiknya diperoleh hubungan sebagai berikut

$$\beta I_\infty + \mu = \mu R_0;$$

$$\beta S^* = \mu + \gamma + \alpha,$$

sehingga diperoleh matriks Jacobian

$$\begin{bmatrix} -\mu R_0 & -(\mu + \gamma + \alpha) \\ \mu(R_0\mu - 1) & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas diperoleh persamaan karakteristiknya

$$\lambda^2 + \mu R_0 \lambda + \mu(R_0 - 1)(\mu + \gamma + \alpha) = 0$$

dengan demikian nilai eigennya adalah

$$\lambda = \frac{-\mu R_0 \pm \sqrt{\mu^2 R_0^2 - 4\mu(R_0 - 1)(\mu + \gamma + \alpha)}}{2}$$

Jika rata-rata periode infeksi  $1/(\gamma + \alpha)$  lebih kecil dari rata-rata harapan hidup, maka nilai eigennya menjadi

$$\frac{-\mu R_0 \pm \sqrt{-4\mu(R_0 - 1)(\gamma + \alpha)}}{2}$$

Karena nilai eigennya memiliki bagian imajiner, maka hal tersebut menunjukkan adanya osilasi dengan periode

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu(R_0 - 1)(\gamma + \alpha)}}$$

Dengan menggunakan relasi  $\mu(R_0 - 1) = \frac{\mu L}{A}$  dan rata-rata periode infeksi  $\tau = \frac{1}{(\gamma + \alpha)}$ , diperoleh periode interepidemi  $T = 2\pi\sqrt{A\tau}$ .

### C. SIMPULAN

Berdasarkan model (1), pengaruh demografi yang dimaksud dalam paper ini adalah laju kelahiran dan kematian, skala waktu epidemi dengan laju  $(\alpha + \gamma)$ . Model epidemi SIR dengan efek demografi memiliki sebuah titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu  $P_0 = (K, 0)$  dan sebuah titik ekuilibrium endemik yaitu  $P^*(S^*, I^*)$ . Dengan melakukan analisis secara lokal terhadap titik ekuilibriumnya, diperoleh jika  $R_0 < 1$ ,  $P_0$  stabil asimtotik lokal dan jika  $R_0 > 1$ , maka  $P^*(S^*, I^*)$  memiliki sifat stabil asimtotik lokal juga.

### DAFTAR PUSTAKA

- Brauer, F dan Chavez, C.C. 2001. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. New York: Springer-Verlag.
- Dickmann, O. dan Heesterbeek, J.A.P. 2000. *Mathematical Epidemiology of Infectious Disease; Model Building, Analysis and Interpretation*. England : Jhon Wiley and Sons . Ltd.
- D.G. Luenberger. 1979. *Dynamic System; Theory, Models, & Applications*, John Wiley & Sons, Canada.
- J.A. Yorke, W.P. London. 1973. Recurrent outbreaks of measles, chickenpox, and mumps II, *AM. J. Epidemiol*, 98, 469-482.
- Nurul, H. *Analysis of disease-free equilibrium point for a SEIV epidemic model with nonlinear incidence rate*. Makalah disampaikan pada Seminar Internasional Matematika dan Penerapannya Jurusan Matematika FMIPA UGM, Yogyakarta, 12 Oktober 2009.
- M. A. Titelbaum, M. Edmunds. 1999. Immunization and Vaccine-Preventable Illness, *Stat. Bull. Metrop. Insur. Co.*, 80, 13-20.