βeta
p-ISSN: 2085-5893
e-ISSN: 2541-0458

Vol. 4 No. 2 (Nopember) 2011, Hal. 151-161

ANALISIS PENYELESAIAN RUBIK 2X2 MENGGUNAKAN GRUP PERMUTASI

Abdurahim[1], Mamika Ujianita Romdhini[2], I Gede Adhitya Wisnu Wardana[3]

Abstrak: Penelitian ini bertujuan menyelesaikan Rubik 2x2, dipandang dari sudut matematika, yaitu bidang aljabar, khususnya grup permutasi. Seperti diketahui, Rubik ini memiliki enam warna berbeda dan dalam keadaan akhir, setiap sisinya memiliki warna yang sama. Dalam penyelesaianya, rubik ini pertama diacak dengan menggunakan koleksi permutasi yang mengakibatkan terjadi pemetaan untuk setiap kubus-kubus kecil. Selanjutnya dianalisis kondisi dan kasusnya dan diselesaikan Rubik 2x2 ini menggunakan grup permutasi.

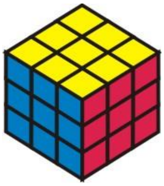
Kata kunci: *Rubik 2x2; Grup Permutasi; Pemetaan*

A. PENDAHULUAN

Berbagai macam cara dapat digunakan untuk mengasah otak sambil bermain. Salah satunya adalah permainan yang menggunakan strategi dan kesabaran yaitu rubik. Banyak jenis rubik yang sering dimainkan, seperti 2x2, 3x3 (*Rubik's Cube*), 4x4 (*Revenge Cube*) dan lain-lain.Secara umum, rubik 2x2 hampir sama dengan *Rubik's Cube*, yaitu memiliki enam permukaan dengan warna setiap permukaan berbeda-beda, tapi pada rubik 2x2 tidak terdapat *edge* dan *center*, hanya terdapat *corner*. Rubik ini memiliki jumlah *corner* yang sama dengan Rubik's Cube, yaitu berjumlah delapan dan setiap *corner* terdiri dari tiga sisi warna yang berbeda (Daniel, dkk., 2008).

[1] Universitas Mataram, Indonesia
[2] Universitas Mataram, Indonesia
[3] Universitas Mataram, Indonesia

Rubik 2x2



Rubik's Cube (Rubik 3x3)

Gambar 1. Rubik 2x2 dan 3x3

Dalam sudut pandang matematika, rubik ini memiliki unsur teori graf, fungsi dan teori grup. Dalam tulisan ini, akan memanfaatkan teori grup pada bidang struktur aljabar. Grup ini memliki tiga sifat, yaitu asosiatif, memilki identitas dan invers, karena rubik ini memiliki tiga sifat tersebut maka rubik ini termasuk dalam grup dan lebih jauh, rubik juga termasuk dalam grup permutasi karena memilki pemetaan satu-satu dan pada. Dalam pembuktian grup, akan dimanfaatkan *move* yang terjadi dalam rubik, *move* yang dimaksud adalah kumpulan langkah dalam menyelesaikan rubik.

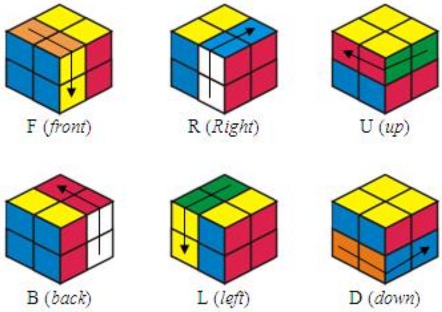
Berdasarkan uraian diatas, pada penelitian ini akan dicoba menganalisa penyelesaian rubik 2x2 ini dengan memaanfaatkan ilmu matematika khususnya pada bidang struktur aljabar yaitu dengan menggunakan teori grup. Teori grup yang digunakan disini adalah grup permutasi.

B. METODE PENELITIAN

Notasi Rubik 2x2

Agar tidak terjadi pemahaman yang berbeda ketika menyelesaikan rubik maka harus ditetapkan notasi. Notasi yang akan digunakan pada penyelesaian ini adalah F, B, R, L, U, D (*front*, *back*, *right*, *left*, *up*, *down*). Notasinya diambil dari huruf awal kata dalam Bahasa Inggrisnya.

Dalam tulisan ini, rubik dimisalkan memiliki kondisi awal dengan sisi depan warna biru, sisi kanan warna merah dan sisi atas warna kuning. Jadi ketika diinginkan menggerakkan bagian depan atau notasi F, maka diputar permukaan bagian depan (sisi berwarna biru) searah jarum jam sebesar 90^0. Demikian juga berlaku untuk notasi B, R, L, U dan D (Daniel, dkk. 2008).



Gambar 2. Notasi pada rubik 2x2

Teorema Fungsi Bijektif (Grimaldi, 2004)

Fungsi $f : A \rightarrow B$ dapat dibalik (invertible) jika dan hanya jika satu-satu dan pada.

Bukti :

(a) Akan dibuktikan dari kiri ke kanan

(i) Diasumsikan fungsi $f : A \rightarrow B$ dapat dibalik, maka terdapat fungsi $g : B \rightarrow A$ dengan $f \circ g = I_A$ dan $g \circ f = I_B$. Jika $a_1, a_2 \in A$ dengan $f(a_1) = f(a_2)$ maka $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ atau $(f \circ g)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$, berakibat $a_1 = a_2$, maka f adalah fungsi satu-satu.

(ii) Ambil $b \in B$ maka $g(b) \in A$. Karena $g \circ f = I_B$, dikatakan b $= I_B (b) = (g \circ f)(b) = f(g(b))$. Maka f merupakan fungsi pada.

(b) Akan dibuktikan dari arah sebaliknyanya.

Dari teorema dikatakan $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi bijektif. Karena f fungsi pada, maka untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ dengan $f(a) = b$ dan karena f juga merupakan fungsi satu-satu, berakibat setiap $b \in B$ hanya terdapat satu $a \in A$. Karena setiap anggota B mempunyai pasangan tepat satu di A, maka dikatakan $g : B \rightarrow A$ merupakan fungsi dan fungsi g merupakan invers dari fungsi f. ■

Definisi Grup (Bhattacharya, 1994)

Himpunan tak hampa G dengan operasi biner # pada G dikatakan grup jika memenuhi aksioma berikut :

1. *Assosiatif*

Setiap a, b ϵ G, kita mempunyai (a # b) # c = a # (b # c)

2. *Identitas*

   Terdapat e ϵ G э e # a = a # e = a, setiap a ϵ G

3. *Invers*

   Setiap a ϵ G, terdapat a' ϵ G э a # a' = a' # a = e.

Definisi Permutasi (Fraleigh, 1994)

Permutasi pada himpunan A adalah suatu fungsi f : A → A yang bersifat satu-satu dan pada.

Teorema Permutasi (Fraleigh, 1994)

Misalkan A adalah himpunan tak hampa, dan misalkan S_A adalah koleksi semua permutasi di A. Maka S_A adalah sebuah grup atas operasi perkalian permutasi.

Bukti :

Karena yang harus dibuktikan adalah grup, maka harus dibuktikan tiga sifat grup, yaitu assosiatif, identitas dan invers.

(i) Karena pemutasi adalah suatu pemetaan dan untuk menunjukkan setiap σ, τ dan μ berlaku $(\sigma\tau)\mu = \sigma(\tau\mu)$, harus ditunjukkan setiap komposisi fungsi memetakan setiap $a \in A$ ke peta yang sama di A. Oleh karena itu, harus ditunjukkan $a[(\sigma\tau)\mu] = a[\sigma(\tau\mu)]$ berlaku untuk semua $a \in A$. Dikatakan $a[(\sigma\tau)\mu] = [a(\sigma\tau)]\mu = [(a\sigma)(\tau)]\mu = (a\sigma)(\tau\mu) = a[\sigma(\tau\mu)]$.

    Jadi, $(\sigma\tau)\mu$ dan $\sigma(\tau\mu)$ memetakan ke elemen yang sama untuk setiap $a \in A$, sehingga $(\sigma\tau)\mu$ dan $\sigma(\tau\mu)$ adalah permutasi yang sama. Jadi sifat pertama grup terpenuhi.

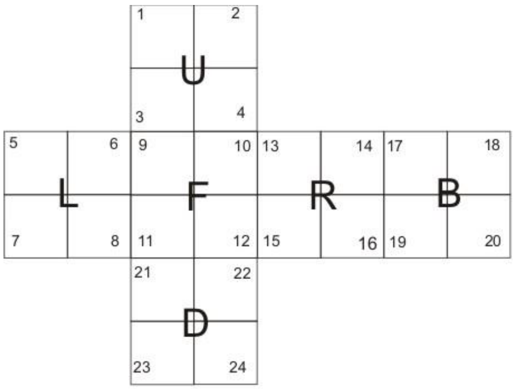
(ii) Permutasi e yang bersifat $ae = a$ untuk setiap $a \in A$ jelas berlaku layaknya unsur identitas, jadi sifat kedua grup terpenuhi.

(iii) Untuk permutasi σ, didefinisikan σ' adalah permuatsi yang membalikkan peta dari permutasi σ kesemula, yang berarti, $a\sigma = a' \in A$ dengan $a = a'\sigma$. Eksistensi ketunggalan a' adalah akibat dari fakta bahwa, sebagai fungsi, σ bersifat satu-satu dan pada. Jelas bahwa $ae = a = a\sigma = (a\sigma')\sigma = a(\sigma'\sigma)$ dan juga $a'e = a' = a\sigma' = (a\sigma)\sigma' = a(\sigma\sigma')$. Sehingga $\sigma\sigma'$ dan $\sigma'\sigma$ merupakan permutasi e.

    Sehingga sifat ketiga grup terpenuhi. ■

Kaitan Rubik Dengan Grup Permutasi

Jika rubik 2x2 ini dianggap sebagai kubus dan dibuka maka akan membentuk jaring-jaring kubus dengan setiap sisi kubus terbagi menjadi 4 bagian kotak kecil kemudian diberikan nomor dari 1 sampai 24 pada setiap kotak kecil serta memberikan huruf setiap sisi kubusnya sebagai notasi (lihat Gambar 2) maka setiap notasi-notasinya dapat dituliskan dalam bentuk permutasi yang terdiri dari cycle-cycle yang disjoint.



Gambar 3. Jaring-jaring rubik 2x2

Jika ditulis notasi-notasi tersebut dalam bentuk permutasi, maka akan diperoleh permutasinya sebagai berikut :

F = (9 10 12 11) (3 13 22 8) (4 15 21 6)

B = (17 18 20 19) (1 7 24 14) (2 5 23 16)

L = (5 6 8 7) (1 9 21 20) (3 11 23 18)

U = (1 2 4 3) (5 17 13 9) (6 18 14 10)

D = (21 22 24 23) (7 11 15 19) (8 12 16 20)

R = (13 14 16 15) (2 19 22 10) (4 17 24 12)

(Joyner, 1966).

Operasi Pada Rubik

Secara umum, menurut definisi, grup memiliki operasi biner, misal dilambangkan oleh #. Tapi pada kasus rubik, operasi yang digunakan adalah ‘komposisi fungsi’. Sebagian besar pada komposisi fungsi, jika ditulis $M_1 \# M_2$ maka M_2 digerakkan terlebih dahulu kemudian diikuti oleh M_1, tapi pada diktat literatur standar Rubik’s Cube menyatakan bahwa jika ditulis $M_1 \# M_2$ maka yang digerakkan terlebih dahulu adalah M_1 kemudian diikuti oleh M_2 (Cordell, 2009).

C. TEMUAN DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas lebih lanjut mengenai grup permutasi yang akan digunakan untuk menganalisa penyelesaian rubik 2x2. Sebelum lebih jauh, didefinisikan bahwa grup G adalah grup yang dibentuk oleh *move* M dalam rubik 2x2.

Didefinisikan *move M* adalah kombinasi dari notasi-notasi dasar sebanyak berhingga atau dapat ditulis $M = a^{i1}\ a^{i2} \ldots a^{in-1}\ a^{in}$ dengan $1 \leq i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n \leq 4$ dan a adalah notasi dasar rubik 2x2 .

Teorema

Jika G adalah himpunan semua move pada rubik 2x2, maka G membentuk grup.

Bukti :

Karena yang akan ditunjukkan bahwa sebarang *move* membentuk grup maka setiap *move* harus memenuhi ketiga sifat grup, yaitu assosiatif, terdapat identitas dan memiliki invers.

(i) Asosiatif

Akan dibuktikan $(M_1 \# M_2) \# M_3 = M_1 \# (M_2 \# M_3)$ untuk M_1, M_2, M_3 sebarang. Sama artinya apabila dibuktikan $(C)[(M_1 \# M_2) \# M_3] = (C)[M_1 \# (M_2 \# M_3)]$ untuk C anggota *corner* sebarang. Ambil $M_1, M_2, M_3 \in G$ sebarang dan C sebagai corner sebarang. Pandang $(C)[(M_1 \# M_2) \# M_3] = ((C)(M_1 \# M_2))M_3 = (((C)M_1)M_2)M_3$ dan pandang $(C)[M_1 \# (M_2 \# M_3)] = ((C)M_1)(M_2 \# M_3) = (((C)M_1)M_2)M_3$. Jadi, $(M_1 \# M_2) \# M_3 = M_1 \# (M_2 \# M_3)$

(ii) Identitas

Ambil $e \in G$, dengan e sebagai identitas grup rubik yang dapat ditulis sebagai berikut $e = a^4\ a^4 \ldots a^4\ a^4$ dan $M \in G$ sebarang *move*. Pandang e # M = $a^4\ a^4 \ldots a^4\ a^4 \# a^{i1}\ a^{i2} \ldots a^{in-1}\ a^{in}$, jika diperhatikan untuk a^4 yang ke - n maka $a^4 \# a^{i1}\ a^{i2} \ldots a^{in-1}\ a^{in} = a^{i1}\ a^{i2} \ldots a^{in-1}\ a^{in}$, kemudian untuk a^4 yang ke - n-1 maka $a^4 \# a^{i1}\ a^{i2} \ldots a^{in-1}\ a^{in} = a^{i1}\ a^{i2} \ldots a^{in-1}\ a^{in}$, demikian seterusnya dilakukan sampai a^4 yang pertama sehingga $e \# M = a^{i1}\ a^{i2} \ldots a^{in-1}\ a^{in} = M$. Dan dengan cara yangg sama berlaku juga untuk $M \# e = M$. Jadi, $M \# e = e \# M = M$. Untuk selanjutnya e bisa ditulis menjadi $e = a^4$.

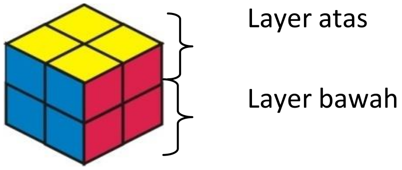
(iii) Invers

Ambil $M \in G$ sebarang dan didefinisikan $M' = a^{jn}\, a^{jn-1} \ldots a^{j2}\, a^{j1}$ dan $i + j = 4$. Pandang $M \# M' = e \leftrightarrow a^{i1}\, a^{i2} \ldots a^{in-1}\, a^{in} \# a^{jn}\, a^{jn-1} \ldots a^{j2}\, a^{j1} = a^4$, perhatikan $a^{in} \# a^{jn} = a^4 \leftrightarrow a^{in+jn} = a^4$ sehingga menjadi $a^{i1}\, a^{i2} \ldots a^{in-1} \# a^4\, a^{jn-1} \ldots a^{j2}\, a^{j1} = a^4$, karena $a^4\, a^{jn-1} = a^4$ maka $a^{i1}\, a^{i2} \ldots a^{in-1} \# a^{jn-1} \ldots a^{j2}\, a^{j1} = a^4$, selanjutnya perhatikan $a^{in-1} \# a^{jn-1} = a^4 \leftrightarrow a^{in-1+jn-1} = a^4$ sehingga menjadi $a^{i1}\, a^{i2} \ldots a^{in-2} \# a^4\, a^{jn-2} \ldots a^{j2}\, a^{j1} = a^4$, karena $a^4\, a^{jn-2} = a^{jn-2}$ maka $a^{i1}\, a^{i2} \ldots a^{in-2} \# a^{jn-2} \ldots a^{j2}\, a^{j1} = a^4$, demikian seterusnya proses tersebut diulang sampai n kali sehingga diperoleh $M' = a^{jn}\, a^{jn-1} \ldots a^{j2}\, a^{j1}$ dengan $i_n + j_n = 4 \leftrightarrow j_n = 4 - i_n$, $j_{n-1} = 4 - i_{n-1}$, $j_{n-2} = 4 - i_{n-2}, \ldots,$ $j_2 = 4 - i_2$, dan $j_1 = 4 - i_1$ sehingga dapat ditulis $M \# M' = e$. Dan dengan cara yang sama berlaku juga $M' \# M = e$. Jadi $M \# M' = M' \# M = e$ dengan M' adalah invers dari M.

Ketiga sifat grup terpenuhi ■

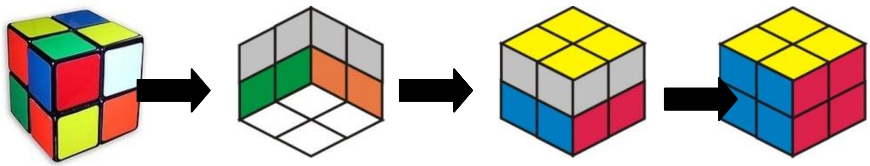
Selanjutnya, dari rubik 2x2, grup *G* juga merupakan grup permutasi. Menurut Teorema Fungsi bahwa fungsi memiliki invers jika dan hanya jika fungsinya bersifat satu-satu dan pada. Karena *move* rubik 2x2 merupakan grup *G* dan terjamin memiliki invers (Definisi Grup) maka *move* rubik 2x2 juga merupakan grup permutasi (Teorema Permutasi).

Selanjutnya bagaimana menyelesaikan rubik 2x2. Pada rubik 2x2 terdiri dari dua layer, yaitu layer pertama atau layer bawah dan layar kedua atau layer atas. Untuk lebih jelasnya bisa dilihat pada gambar dibawah ini.



Gambar 4. Layer rubik 2x2

Dalam proses penyelesaian rubik 2x2 ini, dapat digambarkan melalui bagan seperti dibawah ini.



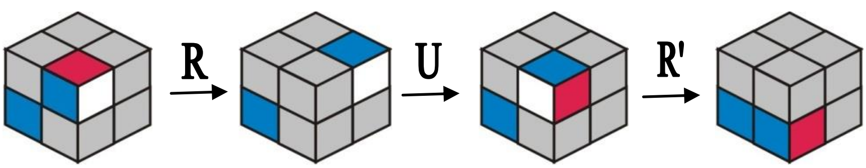
Gambar 5. Langkah-langkah penyelesaian Rubik 2x2

Penjelasan bagan di atas :

1. Pada posisi awal, rubik dalam posisi teracak.
2. Kemudian diselesaikan layer pertama (misal sisi warna putih). Untuk menyelsaikan layer pertama ini, harus dipilih salah satu *corner* sebagai patokan dan diletakkan pada pojok kiri bawah depan (misal dipilih putih-orange-biru). Setelah itu *corner* yang akan dipasangkan dalam kasus ini harus berada pada posisi depan atas kanan atau depan kanan bawah demikian seterusnya sampai keempat *corner* berada pada posisi yang benar. Pada tahap ini terdapat lima kasus, yaitu sebagai berikut:

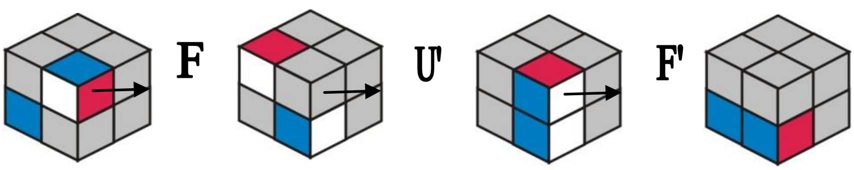
   Kasus 1 :

   Pada kasus ini, dapat diselesaikan dengan menggunakan solusi yaitu RUR'.



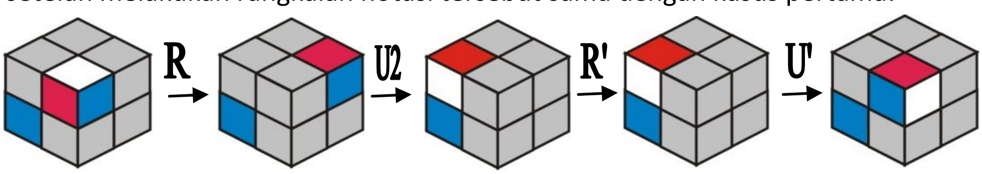
   Kasus 2 :

   Kasus ini diselesaikan dengan solusi F'U'F.



   Kasus 3 :

   Solusi yang digunakan adalah $RU^2R'U'$. Kemudian pada keadaan terakhir setelah melakukan rangkaian notasi tersebut sama dengan kasus pertama.



Apabila ditulis secara lengkap, solusinya adalah $RU^2R'U'RUR'$.

Kasus 4 :

Solusi yang digunakan adalah F'U'FU. Kemudian pada keadaan terakhir ini sama dengan kasus kedua.

Apabila ditulis secara lengkap, solusinya adalah F'U'FUF'U'F

Kasus 5 :

Pada kasus ini dapat diselesaikan dengan solusi RUR'U', kemudian keadaan terakhirnya sama dengan kasus pertama dan dapat diselesaikan dengan solusi penyelesaian kasus pertama.

Apabila ditulis secara lengkap, solusinya adalah RUR'U'RUR'

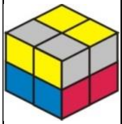
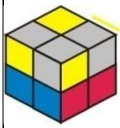
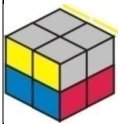
Keterangan : Berdasarkan Teorema Permutasi penyelesaian dalam lima kasus yang digunakan merupakan grup atas operasi perkalian permutasi.

Apabila sudah terselesaikan layer pertama, rubik akan tampak seperti pada gambar.

Gambar 6. Layer pertama selesai, tampak dua sisi yang berlawanan

3. Setelah layer pertama selesai, kemudian akan diselesaikan layer atas bagian kuningnya saja atau biasa disebut OLL (*Orientation Last Layer*). Terdapat tujuh kasus yang ada dalam OLL rubik 2x2 beserta solusi penyelesainnya, dapat dilihat pada tabel dibawah ini.

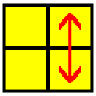
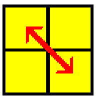
Tabel 1. Kondisi OLL dan solusi yang digunakan

Kondisi	**Solusi**	**Kondisi**	**Solusi**
	$RUR'URU^2R'$		$R^2DR'U^2RD'R'U^2R'$
	$R'U'RU'R'U^2R$		$F'RU\ R'U'R'FR$
	$RU^2R^2U'R^2U'R^2$ U^2R		$R^2U^2R'U^2R^2$
	$RUR'U'R'FRF'$		

Keterangan : Berdasarkan Teorema Permutasi semua solusi dalam kasus OLL yang digunakan merupakan grup atas operasi perkalian permutasi.

4. Langkah terakhir yaitu membenarkan posisi layer atas bagian pinggir atau biasa disebut dengan PLL (*Permutation Last Layer*). PLL yang dibutuhkan yaitu dua kondisi beserta solusi penyelesainnya, selengkapnya dapat dilhat pada tabel dibawah ini.

Tabel 2. Kondisi PLL dan solusi yang digunakan

No.	Kondisi	Solusi
1		$R\ U^2\ R'\ U'\ R\ U^2\ L'\ U\ R'\ U'\ L$
2		$F\ R\ U'\ R'\ U'\ R\ U\ R'\ F'\ R\ U\ \ R'\ U'\ R'\ F\ R\ F'$

Keterangan : Kondisi pertama pada Tabel 2 digunakan jika terdapat sisi yang sudah jadi atau dua *corner* yang berpasangan dan diletakkan disebelah kiri, sehingga dalam kondisi ini akan terjadi pertukaran dua *corner* yang bersebelahan, yaitu *corner* bagian depan atas kanan dengan *corner* bagian belakang kanan atas. Kondisi kedua digunakan jika bukan kondisi pertama atau tidak terdapat dua *corner* yang bersebelahan dan berpasangan.

Berdasarkan Teorema Permutasi maka kedua solusi pada PLL tersebut merupakan grup atas operasi perkalian permutasi.

D. SIMPULAN

Dari hasil pembahasan pada penelitian ini maka simpulan yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

1. Move rubik 2x2 membentuk grup.
2. Grup yang dibentuk oleh move rubik 2x2 adalah grup permutasi.
3. Dalam menyelesaikan rubik 2x2 dapat diselesaikan dengan menggunakan grup permutasi.

DAFTAR PUSTAKA

Bhattacharya, P.B.,dkk., 1994, *Basic Abstract Algebra*, 2nd Edition, Camridge University Press, USA.

Cordell, E., 2009, Group Theoretic Properties of the Rubik’s Cube, http://129.81.170.14/~erowland/courses/2009-2/projects/Cordell, diakses tanggal 8 Maret 2011.

Daniel, dkk., 2008, Group Theory on the Rubik's Cube, www.kubologie.de, diakses tanggal 25 Mei 2001.

Fraleigh, J. B., 1994, *A First Course in Abstract Algebra,* 5th Edition, Addison Wesley Publishing Company, USA.

Grimaldi, R.P., 2004, *Discrete And Combinatorial Mathematics*, 5th Edition, Adisson Wesley, USA.

Joyner, W. D., 1996, *Mathematics of the Rubik’s Cube*, Dover Publications, New York.

Klima, Richard E.,dkk., 1999, *Applications of Abstract Algebra with Maple* CRC Press, USA.

Singmaster, D., 2003, Adventures in Group Theory: Rubik's Cube, Merlin's Machine and Other Mathematical Toys*, Proquest*, ISSN 00030996, Volume 91, Halaman 468.