βeta

p-ISSN: 2085-5893
e-ISSN: 2541-0458

Vol. 4 No. 2 (Nopember) 2011, Hal. 133-150

KESTABILAN TITIK EKUILIBRIUM BEBAS HEROIN DALAM MODEL SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL (ODE)

Lalu Saparwadi[1]

Abstrak: Diberikan model epidemik SU_1U_2 (SIR) yang menggambarkan efek fisik dan psikologis dari penyakit akibat kecanduan Heroin pada masyarakat. Dalam tulisan ini, dipelajari kesetabilan dari ekuilibrium bebas Heroin. Jumlah reproduksi dasar didefinisikan dengan $R_0 = \frac{\beta_1}{p+\mu+\delta_1}$, dengan β_1 menyatakan peluang dari tidak memakai menjadi pemakai Heroin, p menyatakan proporsi dari sebarang pemakai Heroin memasuki pengobatan, μ menyatakan tingkat kematian alami dari sebarang populasi, dan δ_1 menyatakan laju pengurangan individu akibat kematian karena pemakaian Heroin yang tidak dalam pengobatan dan kesembuhan secara spontan (individu tidak dalam pengobatan dapat berhenti memakai Heroin tapi tidak rentan lebih lama). Jika $R_0 < 1$, maka model ini mempunyai titik ekuilibrium bebas Heroin yang stabil asymtotik lokal. Jika $R_0 > 1$, maka model ini mempunyai titk ekuilibrium bebas Heroin yang tidak stabil.

Kata kunci: *Titik Ekuilibrium; Bebas Heroin; Sistem Persamaan Diferensial*

A. PENDAHULUAN

Sejak ribuan tahun yang lalu, manusia sudah mengenal bahan-bahan berasal dari tumbuhan liar seperti alkohol, Opium, Ganja dan Kokain. Bahan-bahan ini selain digunakan untuk tujuan pengobatan juga dipakai untuk ritus keagamaan, sosialisasi maupun tujuan mencari kesenangan (rekreasi). Bahan-bahan ini dikenal juga sebagai zat psikoaktif

[1] Universitas Hamzanwadi Lombok Timur, Indonesia

yang dapat menyebabkan perubahan prilaku, kesadaran, pikiran dan perasaan seseorang sehingga dapat menimbulkan perasaan nyaman, gembira dan memperlancar pergaulan, yang penggunaanya berlanjut dan meluas sampai sekarang. Salah satu jenis Narkoba yang sejenis dengan Opium adalah Heroin. Penggunaan narkoba yang berjenis Heroin bisa dilakukan dengan cara dihisap, disedot, dan disuntikan. Model penularan Heroin antara individu yaitu dengan penggunaan jarum suntik yang tidak steril dan berganti-ganti dengan jarum suntik yang sama dalam bentuk apapun, dan jika Narkoba khususnya yang berjenis Heroin digunakan secara terus menerus atau melebihi takaran yang telah ditentukan maka akan mengakibatkan ketergantungan. Ketergantungan (kecanduan) inilah yang akan mengakibatkan gangguan fisik dan psikologis, karena terjadinya kerusakan pada organ-organ tubuh seperti jantung, paru-paru, hati, ginjal, dan menekan sistem syaraf pusat dan mengurangi aktifitas fungsional tubuh sehingga pemakai merasa tenang, bahkan bisa membuat pemakai tidur dan tak sadarkan diri. Bila kelebihan dosis maka akan bisa mengakibatkan kematian.

Salah satu cabang mathematical biosciences adalah mathematical epidemiologi, yang mempelajari tentang penyebaran dan kontrol wabah penyakit. Mempelajari model epidemik yang didalamnya termasuk penyakit penyebab kematian pada suatu total populasi yang berubah merupakan hal yang penting dalam mathematical epidemiologi. Hal ini diplopori oleh Anderson dan May (Li dkk, 2001)

Dengan berbagai asumsi, dikenal berbagai model epidemik, diantaranya SIR, SIRS, SEIR, SEIRS, SEIS. Dalam model SIR dan SIRS, penyakit tidak mempunyai latent period dan diasumsikan individu yang rentan dapat terjangkit dan kemudian sembuh. Dalam model SIR, individu yang sudah sembuh mempunyai kekebalan sehingga tidak lagi menjadi rentan, sedangkan untuk model SIRS individu yang sudah sembuh tidak memiliki kekebalan terhadap penyakit tersebut sehingga dapat menjadi rentan lagi.

Dalam tulisan ini akan dibahas kestabilan titik ekuilibrium bebas Heroin dari sifat dinamika model SIR berdasarkan jurnal yang ditulis oleh Emma White dan Catherine Comiskey (2007), yaitu epidemik Heroin, pengobatan dan pemodelan persamaan diferensial berorde (ODE). Titik ekuilibrium bebas Heroin diselidiki kestabilan dengan menghitung nilai eigen-nilai eigen matriks jakobiannya.

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan dalam penelitian ini yaitu bagaimana sifat kestabilan titik ekuilibrium bebas Heroin di $R_0 < 1$, $R_0 = 1$ dan $R_0 > 1$.

B. LANDASAN TEORI

1. Sistem Persamaan Diferensial

Diberikan fungsi-fungsi

$x_i : \Re_{+,0} \to \Re$, x_i fungsi terdiferensial pada $\Re_{+,0}$, untuk *i* =1,2,...,*n* , $x : \Re_{+,0} \to \Re^n$, dengan $\Re_{+,0}$ himpunan bilangan real nonnegatif, $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, $\dot{x} = \left(\dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_n\right)$ dan $f_i : E \subseteq \Re^n \to \Re$, i = 1, 2, ..., n.

Selanjutnya dibentuk Sistem Persamaan Diferensial

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \\ \dot{x}_2 &= f_2\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \end{aligned} \qquad (2.1.1)$$

dengan kondisi awal $x_i\left(t_0\right) = x_{i0}, i = 1, 2, ..., n$. Sistem (2.1.1) dapat ditulis menjadi

$$\dot{x} = f\left(x\right) \qquad (2.1.2)$$

dengan $\dot{x}_i = \dfrac{dx_i}{dt}$, $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in E$, $f = \left(f_1, f_2, ..., f_n\right)$ dan kondisi awal $x\left(t_0\right) = \left(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}\right) \in E$.

Berikut ini diberikan definisi dan teorema yang menyatakan eksistensi dan ketunggalan solusi Sistem (2.1.2).

Definisi 2.1.1 (Perko, 1991)

Diberikan $E \subseteq \mathbb{R}^n$, *E himpunan terbuka, dan* $f_i \in C(E,\Re)$, *i = 1, 2, ..., n. Vektor* $x(t) \in \Re^n$ *disebut penyelesaian Sistem (2.1.2) pada interval I jika* $x(t)$ *terdiferensial pada I dan* $\dot{x}(t) = f(x(t))$ *untuk setiap* $t \in I$ *dan* $x(t) \in E$.

Teorema 2.1.2 (Perko, 1991)

Jika $E \subset \mathbb{R}^n$, *E terbuka,* $f_i \in C^1(E,\Re)$, *i = 1,2,...,n dan* $x_0 \in E$ *maka terdapat* $a > 0$ *sehingga masalah nilai awal* $\dot{x} = f(x(t))$ *dengan* $x(0) = x_0$ *mempunyai penyelesaian tunggal* $x(t)$ *pada interval* $[-a, a]$.

Selanjutnya akan diberikan definisi titik ekuilibrium dan kestabilan suatu sistem pada $\Re^n$ sebagai berikut:

Definisi 2.1.3 (Perko, 1991)

Titik $\bar{x} \in \Re^n$ *disebut titik ekuilibrium Sistem (2.1.2) jika* $f(\bar{x}) = 0$.

Definisi 2.1.4 (Wiggins, 1990)

Titik ekuilibrium $\bar{x} \in \Re^n$ *Sistem (2.1.2) dikatakan*

a) *Stabil lokal jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian hingga untuk setiap solusi Sistem (2.1.2)* $x(t)$ *yang memenuhi* $\left\|x(t_0) - \bar{x}\right\| < \delta$ *maka berakibat* $\left\|x(t) - \bar{x}\right\| < \varepsilon$ *untuk setiap* $t \geq t_0$.

b) *Stabil asimtotik lokal jika titik ekuilibrium* $\bar{x} \in \Re^n$ *stabil dan terdapat bilangan* $\delta_0 > 0$ *sehingga untuk setiap solusi* $x(t)$ *yang memenuhi* $\left\|x(t_0) - \bar{x}\right\| < \delta_0$ *maka berakibat* $\lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x}$.

c) *Tidak stabil jika titik ekuilibrium* $\bar{x} \in \Re^n$ *tak memenuhi (a).*

2. Linearisasi Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Sebelum mendefinisikan linierisasi sistem persamaan nonlinear, berikut diberikan pengertian matriks Jakobian.

Definisi 2.2.1 (Kocak, 1991)

Diberikan $f = (f_1,\ f_2, \cdots,\ f_n)$ *pada Sistem (2.1.2) dengan* $f_i \in C^1(E)$, $i = 1,\ 2, \cdots,\ n$. *Matriks*

$$J\left(f(\bar{x})\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix} \qquad (2.2.1)$$

dinamakan matriks Jacobian dari f *di titik* $\bar{x}$ *.*

Diberikan Sistem (2.1.2). Jika $f(x)$ merupakan fungsi nonlinear, maka Sistem (2.1.2) disebut sebagai sistem persamaan diferensial nonlinear. Misalkan $\xi(t)$ penyelesaian dari (2.1.2) yang berkorespodensi dengan initial state $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$. Jika Sistem (2.1.2) didekatkan dengan deret Taylor disekitar titik $\bar{x}(t)$ maka diperoleh

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(\bar{x})(x-\bar{x})^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}(\bar{x})(x-\bar{x})^3 + \ldots$$

dengan $f(\bar{x}) = 0$. Karena suku-suku tak linear pada deret tersebut cukup kecil dan dengan dimisalkan $\xi = (x-\bar{x})$, maka $\dot{\xi}(t) = \dot{x}(t)$. Jadi diperoleh

$$\dot{\xi}(t) = f(x(t)) = J\left(f(\bar{x})\right)\xi,$$

dengan $\frac{df}{dx}(\bar{x}) = J\left(f(\bar{x})\right)$, dan sistem $\dot{\xi}(t) = J\left(f(\bar{x})\right)\xi$ disebut linierisasi dari Sistem (2.1.2) disekitar titik $\bar{x}$.

3. Nilai Eigen, Vektor Eigen

Himpunan semua matriks yang berukuran $n \times n$ yang elemen-elemennya berupa bilangan real dinotasikan dengan $M_n(\Re)$, dengan $\Re$ himpunan semua bilangan real. Berikut ini akan diberikan beberapa definisi yang terkait dengan $A \in M_n(\Re)$.

Definisi 2.3.1 (Anton, H., 1994)

Diberikan A adalah matriks berukuran $n \times n$ *, jika* Ax *adalah kelipatan skalar dari x maka vektor tak nol x di dalam* $\mathbb{R}^n$ *disebut vektor eigen (eigenvector) dari A, jelasnya*

$$Ax = \lambda x$$

untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen (eigenvalue) dari A dan ***x*** *disebut vektor eigen dari A yang terkait dengan λ.*

Definisi 2.3.2 (Anton, H., 1994)

Polinomial karakteristik dari $A \in M_n(\Re)$ *didefinisikan sebagai*

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

(2.3.1)

dengan I matrik identitas dan skalar λ.

4. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Dengan menggunakan matriks Jacobian $J(f(\bar{x}))$, sifat kestabilan titik ekuilibrium $\bar{x}$ dapat diketahui asalkan titik tersebut hiperbolik. Berikut diberikan definisi titik hiperbolik dan teorema kestabilan lokal.

Definisi 2.4.5 (Perko, 1991)

Titik ekuilibrium $\bar{x}$ *Sistem (2.1.2) disebut titik ekuilibrium hiperbolik jika semua nilai eigen matriks Jacobian* $J(f(\bar{x}))$ *mempunyai bagian real tak nol.*

Teorema 2.4.6 (Olsder, 1994)

Diberikan $\dot{x} = Ax$*, dengan A matriks berukuran* $n \times n$*, mempunyai nilai eigen* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ $(k \le n)$ *, maka*

1. *Jika* $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$ *untuk* $i = 1, 2, ..., n$ *maka* $\bar{x} = 0$ *dari sistem (2.1.2) stabil asimtiotik lokal.*
2. *Jika* $\mathrm{Re}\,\lambda_i \le 0$ *untuk* $i = 1, 2, ..., n$*, maka* $\bar{x} = 0$ *stabil dan untuk nilai eigen* $\mathrm{Re}\,\lambda_i = 0$ *bersesuaian dengan vektor eigen yang bebas linier sebanyak multiplisitas* λ_i *.*

3. *Jika terdapat nilai eigen matriks Jacobian Jf* (x) *yang mempunyai bagian real positif, maka titik ekuilibrium x dari Sistem (2.1.2) tak stabil.*

C. TEMUAN DAN PEMBAHASAN

1. Model Persamaan

Pada tulisan ini akan dipelajari sistem persamaan diferensial yang menggambarkan dinamika populasi untuk epidemik Heroin. Penyakit tersebut menyebar pada populasi tertentu melalui kontak langsung antar individu. Jika seseorang terkena penyakit ini maka orang tersebut memiliki kemungkinan untuk sembuh.

Model penyakit akibat penularan dalam mengkonsumsi Heroin di atas merupakan model epidemik dengan laju penularan nonmonoton. Dalam hal ini populasi dibagi menjadi 3 kelas, yaitu kelas rentan (*S*) yang menyatakan kelas individu yang belum terjangkit penyakit, kelas terinfeksi (U_1) yang menyatakan kelas individu yang terjangkit penyakit dan memiliki kemampuan untuk menularkan penyakit ke kelas *S* dan kelas sembuh (U_2) yang menyatakan kelas individu yang sedang dalam penyembuhan dari infeksi yang dibicarakan.

Jika $S(t)$, $U_1(t)$ dan $U_2(t)$ berturut-turut menyatakan jumlah individu yang rentan, terinfeksi dan sembuh dari penyakit pada saat t, maka diperoleh hubungan $S(t)+U_1(t)+U_2(t)=N(t)$ dengan $N(t)$ menyatakan jumlah populasi. Misalkan μ menyatakan tingkat kematian alami dari sebarang populasi, dan Λ menyatakan laju individu dalam populasi memasuki kondisi rentan. Parameter δ_1 menyatakan laju pengurangan individu akibat kematian karena pemakaian Heroin yang tidak dalam pengobatan dan kesembuhan secara spontan (individu tidak dalam pengobatan dapat berhenti memakai Heroin tapi tidak rentan lebih lama), dan δ_2 menyatakan laju pengurangan akibat kematian ketika pemakai Heroin yang sedang dalam pengobatan, laju keberhasilan dalam pengobatan untuk kehidupan yang bebas Heroin dan kekebalan dari kecanduan Heroin dalam durasi periode waktu tertentu. Untuk memodelkan kasus ini, diasumsikan bahwa:

a. ($\Lambda = \mu S + (\mu + \delta_1)U_1 + (\mu + \delta_2)U_2$)

Menyatakan laju individu dalam populasi memasuki kondisi rentan sama dengan jumlah dari tingkat kematian alami dari populasi yang rentan, laju pengurangan individu akibat kematian karena pemakaian Heroin yang tidak dalam pengobatan dan kesembuhan secara spontan, dan laju pengurangan akibat kematian ketika pemakai Heroin yang sedang dalam pengobatan, laju keberhasilan pengobata untuk kehidupan yang bebas Heroin dan kekebalan dari kecanduan Heroin dalam durasi periode waktu tertentu

b. Proporsi pemakai Heroin yang tidak sedang dalam pengobatan masuk ke tahap pengobatan dalam setiap waktu tertentu.

c. Individu yang sedang dalam pengobatan adalah pemakai Heroin.

d. Pemakai Heroin yang tidak dalam pengobatan dapat berhenti sebagai pemakai pada setiap periode waktu tertentu.

e. Individu yang rentan dapat tertular oleh pemakai Heroin yang tidak masuk dalam pengobatan.

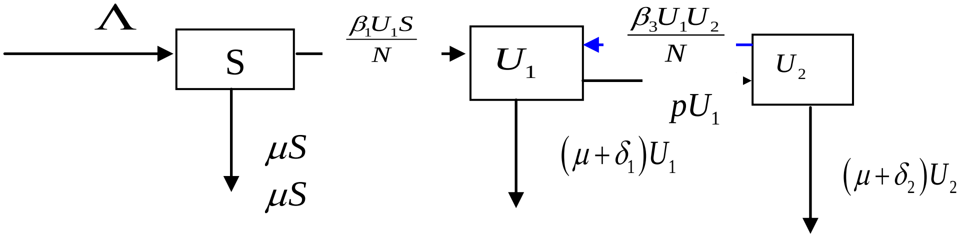
f. Pemakai yang sedang dalam pengobatan dapat tertular (kambuh lagi) jika kontak dengan pemakai Heroin yang sedang terinfeksi (pemakai Heroin yang tidak sedang dalam pengobatan).

g. Pemakai Heroin yang sedang dalam pengobatan tidak menular ke kelas individu yang rentan.

h. Setiap individu dalam suatu populasi mempunyai kesempatan yang sama untuk melakukan kontak dengan individu lainnya.

i. Semua anggota dari populasi rentan untuk mengalami kecanduan Heroin.

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas di peroleh diagram transfer:



Dengan demikian diperoleh model SU_1U_2 yang merupakan model SIR (Murray, 2002) sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - \mu S$$
$$\frac{dU_1}{dt} = \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - pU_1 + \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_1) U_1 \tag{3.1}$$
$$\frac{dU_2}{dt} = pU_1 - \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_2) U_2$$

Dengan β_1 menyatakan peluang dari tidak memakai menjadi pemakai Heroin, *P* menyatakan proporsi dari sebarang pemakai Heroin memesuki pengobatan dan β_3 menyatakan peluang dari pengguna Heroin yang sedang dalam pengobatan kambuh lagi dengan tanpa pengobatan.

2. *Basic reproduction number* (R_0)

Basic reproduction number (R_0) adalah jumlah infeksi sekunder yang dihasilkan oleh satu infeksi primer pada populasi rentan (Murray, 2002). Oleh karena itu, titik kritis R_0 berkisar 1, jika $R_0 > 1$ maka penyakit menyebar atau terjadi epidemi Heroin, namun jika $R_0 < 1$ maka penyakit tidak menyebar atau bebas Heroin. Dalam hal penggunaan Heroin, R_0 dikatakan diatas rata-rata, jika total laju individu untuk setiap satu pemakai Heroin akan mulai memakai Heroin dan selamanya tetap memakai Heroin. Dalam hal ini R_0 dari model parameter didefinisikan

$$R_0 = \frac{\beta_1}{p + \mu + \delta_1}. \tag{3.2}$$

2.1. Tingkat kepekaan R_0

Berikut ini akan diuji tingkat kepekaan dari R_0 terhadap masing-masing parameter dan setiap parameter dihitung sebagai berikut :

$$A_{\beta_1} = \frac{\dfrac{\partial R_0}{R_0}}{\dfrac{\partial \beta_1}{\beta_1}} = \frac{\beta_1}{R_0}\frac{\partial R_0}{\partial \beta_1} = \beta_1 \left(\frac{p + \mu + \delta_1}{\beta_1} \right) \left(\frac{1}{p + \mu + \delta_1} \right) = 1 \tag{3.3}$$

Untuk A_{β_1} merupakan tingkat kepekaan R_0 terhadap β_1, dan A_{β_1} diperoleh melalui perbandingan antara perubahan R_0 dengan perubahan parameter β_1 dan A_{β_1} = 1. Dengan demikian, besarnya perubahan parameter β_1 akan mempengaruhi besar perubahan R_0 dalam jumlah yang sama.

Sebagai contoh, satu kenaikan β_1 sebanyak 2% akan menghasilkan kenaikan R_0 sebanyak 2%.

Selanjunya akan dihitung tingkat kepekaan R_0 terhadap parameter p, dan diperoleh

$$A_p = \frac{\frac{\partial R_0}{R_0}}{\frac{\partial p}{p}} = \frac{p}{R_0}\frac{\partial R_0}{\partial p} = p\left(\frac{p+\mu+\delta_1}{\beta_1}\right)\left(\frac{-\beta_1}{\left(p+\mu+\delta_1\right)^2}\right) = \left|\frac{-p}{p+\mu+\delta_1}\right| < 1$$

Dengan A_p menyatakan tingkat kepekaan R_0 terhadap p, A_p diperoleh melalui perbandingan antara perubahan R_0 dengan perubahan parameter p dan diperoleh $A_p < 1$. Dengan demikian, besarnya perubahan parameter p akan mempengaruhi besar perubahan R_0 dalam jumlah yang lebih kecil.

Dengan cara yang sama akan dihitung tingkat kepekaan R_0 terhadap parameter μ, dan diperoleh

$$A_\mu = \frac{\frac{\partial R_0}{R_0}}{\frac{\partial \mu}{\mu}} = \frac{\mu}{R_0}\frac{\partial R_0}{\partial \mu} = \left|\frac{-\mu}{p+\mu+\delta_1}\right| < 1.$$

Dengan A_μ merupakan tingkat kepekaan R_0 terhadap μ, A_μ diperoleh melalui perbandingan antara perubahan R_0 dengan perubahan parameter μ dan diperoleh $A_\mu < 1$. Dengan demikian, besarnya perubahan parameter μ akan mempengaruhi besar perubahan R_0 dalam jumlah yang lebih kecil.

Dengan cara yang sama akan dihitung tingkat kepekaan R_0 terhadap parameter δ_1, dan diperoleh

$$A_{\delta_1} = \frac{\dfrac{\partial R_0}{R_0}}{\dfrac{\partial \delta_1}{\delta_1}} = \frac{\delta_1}{R_0}\frac{\partial R_0}{\partial \delta_1} = \left|\frac{-\delta_1}{p+\mu+\delta_1}\right| < 1$$

Dengan A_{δ_1} merupakan tingkat kepekaan R_0 terhadap δ_1, A_{δ_1} diperoleh melalui perbandingan antara perubahan R_0 dengan perubahan parameter δ_1 dan diperoleh $A_{\delta_1} < 1$. Dengan demikian, besarnya perubahan parameter δ_1 akan mempengaruhi besar perubahan R_0 dalam jumlah yang lebih kecil.

Dari perhitungan di atas dapat disimpulkan bahwa R_0 adalah memiliki tingkat kepekaan paling tinggi terhadap β_1. Kenaikan β_1 akan menyebabkan kenaikan R_0 dalam jumlah yang sama dan pengurangan β_1 akan menyebabkan pengurangan R_0 secara proporsional. p, μ dan δ_1 mempunyai hubungan sebaliknya dengan R_0. Kenaikan untuk sebarang p, μ dan δ_1 akan menyebabkan pengurangan R_0.

Dengan mengingat bahwa μ adalah tingkat kematian alami dari populasi dan δ_1 adalah tingkat penguragan akibat kematian karena pemakai Heroin yang tidak dalam pengobatan dan tingkat kesembuhan secara spontan, maka untuk memperkecil terjadinya penularan akan dipilih satu dari dua parameter diantaranya yaitu *p*, yang menyatakan proporsi dari pemakai Heroin memasuki pengobatan atau β_1, yang menyatakan peluang dari menjadi individu pemakai Heroin. Adanya peluang terjadinya siklus pengobatan, maka yang menjadi fokus utama kasus ini yaitu penurunan terhadap parameter β_1. Dengan kata lain, analisis kepekaan ini menceritakan bahwa pencegahan lebih baik dari pada pengobatan. Oleh karena itu, upaya meningkatkan pencegahan pemakai Heroin lebih efektif dalam mengontrol penyebaran penularan Heroin dari pada upaya untuk mempertambah jumlah pengobatan individu yang terinfeksi Heroin.

3. Kestabilan ekuilibrium bebas Heroin

Berikut akan dicari titik ekuilibrium dari Sistem (3.1) dengan asumsi bahwa keadaan setimbang dari yang rentan, terinfeksi dan penyembuhan secara berterurt-turut.

$$f_1(S,U_1,U_2)=\Lambda-\frac{\beta_1 U_1 S}{N}-\mu S \quad (3.4)$$

$$f_2(S,U_1,U_2)=\frac{\beta_1 U_1 S}{N}-pU_1+\frac{\beta_3 U_1 U_2}{N}-(\mu+\delta_1)U_1 \quad (3.5)$$

$$f_3(S,U_1,U_2)=pU_1-\frac{\beta_3 U_1 U_2}{N}-(\mu+\delta_2)U_2 \quad (3.6)$$

$$\underline{f}=(f_1,f_2,f_3).$$

Titik ekuilibrium dari sistem (3.1) dihitung dengan mencari solusi dari $f_1(S,U_1,U_2)=0,\ f_2(S,U_1,U_2)=0,\ f_3(S,U_1,U_2)=0$.

Lemma 3.1

Sistem (3.1) mempunyai titik ekuilibtium $(S^*,U_1^*,U_2^*)=\left(\frac{\Lambda}{\mu},0,0\right)$ *dan disebut titik ekuilibrium bebas Heroin.*

Bukti:

Dari (3.5), jika $f_2(S,U_1,U_2)=0$ maka diperoleh

$$\frac{\beta_1 U_1 S}{N}-pU_1+\frac{\beta_3 U_1 U_2}{N}-(\mu+\delta_1)U_1=0$$

dan jika $\frac{\beta_1 S}{N}-p+\frac{\beta_3 U_2}{N}-(\mu+\delta_1)\neq 0$, maka $U_1=0$

Dari (3.6), jika $f_3(S,U_1,U_2)=0$ maka

$$pU_1-\frac{\beta_3 U_1 U_2}{N}-(\mu+\delta_2)U_2=0$$

$$U_2=\frac{pU_1}{\frac{\beta_3 U_1 U_2}{N}+(\mu+\delta_2)} \quad (3.7)$$

Jika $U_1=0$ disutitusikan ke (3.7), maka diperoleh $U_2=0$

Dari (3.5) , jika $f_1(S,U_1,U_2)=0$ maka $\Lambda-\frac{\beta_1 U_1 S}{N}-\mu S=0$

$$S=\frac{N\Lambda}{\beta_1 U_1+N\mu} \tag{3.8}$$

Jika $U_1=0$ disutitusikan ke (3.8), maka diperoleh $S=\frac{\Lambda}{\mu}$, dan diperoleh

$$\left(S^*,U_1^*,U_2^*\right)=\left(\frac{\Lambda}{\mu},0,0\right). \tag{3.9}$$

Dari persamaan di atas diperoleh titik ekuilibtium $\left(S^*,U_1^*,U_2^*\right)=\left(\frac{\Lambda}{\mu},0,0\right)$ dan disebut titik ekuilibrium bebas Heroin.

Kestabilan dari titik ekuilibrium bebas Heroin di atas dapat disajikan dalam teorema berikut ini.

Teorema 3.2

1) *Jika* $R_0<1$, *maka titik ekuilibrium* $\left(S^*,U_1^*,U_2^*\right)=\left(\frac{\Lambda}{\mu},0,0\right)$ *stabil asimtotik local.*
2) *Jika* $R_0>1$, *maka titik ekuilibrium* $\left(S^*,U_1^*,U_2^*\right)=\left(\frac{\Lambda}{\mu},0,0\right)$ *tidak stabil.*
3) *Jika* $R_0=1$, *maka kestabilan dari titik ekuilibrium* $\left(S^*,U_1^*,U_2^*\right)=\left(\frac{\Lambda}{\mu},0,0\right)$ *belum dapat ditentukan menggunakan matrik linierisasi*.

Bukti:

$$J\,\underline{f}\left(S,U_1,U_2\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1\left(S,U_1,U_2\right)}{\partial S} & \frac{\partial f_1\left(S,U_1,U_2\right)}{\partial U_1} & \frac{\partial f_1\left(S,U_1,U_2\right)}{\partial U_2}\\ \frac{\partial f_2\left(S,U_1,U_2\right)}{\partial S} & \frac{\partial f_2\left(S,U_1,U_2\right)}{\partial U_1} & \frac{\partial f_2\left(S,U_1,U_2\right)}{\partial U_2}\\ \frac{\partial f_3\left(S,U_1,U_2\right)}{\partial S} & \frac{\partial f_3\left(S,U_1,U_2\right)}{\partial U_1} & \frac{\partial f_3\left(S,U_1,U_2\right)}{\partial U_2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{\beta_1 U_1}{N}-\mu & -\frac{\beta_1 S}{N} & 0\\ \frac{\beta_1 U_1}{N} & \frac{\beta_1 S}{N}-p+\frac{\beta_3 U_2}{N}-\left(\mu+\delta_1\right) & \frac{\beta_3 U_1}{N}\\ 0 & p-\frac{\beta_3 U_2}{N} & -\frac{\beta_3 U_2}{N}-\left(\mu+\delta_1\right)\end{bmatrix}$$

Jika disubtitusikan $\left(S^*,U_1^*,U_2^*\right)=\left(\frac{\Delta}{\mu},0,0\right)$ dan $S^*=N$, maka matriks Jakobian menjadi

$$J\,\underline{f}\left(\frac{\Lambda}{\mu},0,0\right)=\begin{pmatrix}-\mu & -\beta_1 & 0\\ 0 & \beta-\left(p+\mu+\delta_1\right) & 0\\ 0 & p & -\left(\mu+\delta_2\right)\end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Polynomial karakteristik dari $J\,\underline{f}\left(\frac{\Lambda}{\mu},0,0\right)$ adalah

$P\left(\lambda\right)=\left(\lambda I-J\,\underline{f}\left(\frac{\Lambda}{\mu},0,0\right)\right)$ dan I adalah matriks identitas ukuran 3 x 3 dan diperoleh

$$P(\lambda)=\left(\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\mu & -\beta_1 & 0\\ 0 & \beta_1-\left(p+\mu+\delta_1\right) & 0\\ 0 & p & -\left(\mu+\delta_2\right)\end{pmatrix}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\lambda+\mu\right)\left(\lambda-\beta+\left(p+\mu+\delta_1\right)\right)\left(\lambda+\left(\mu+\delta_2\right)\right)=0$$

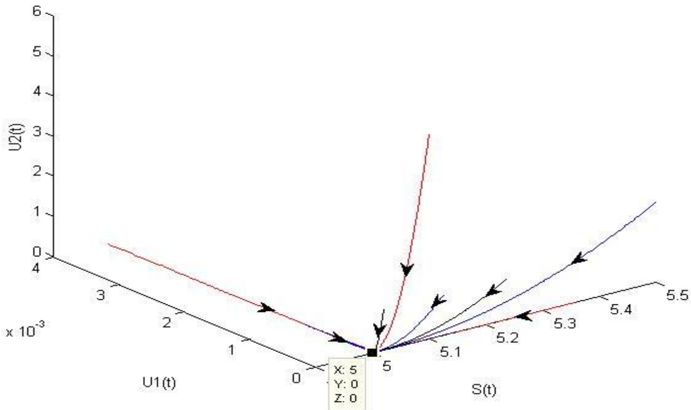
$\Leftrightarrow \lambda_1 = -\mu, \qquad \lambda_2 = \beta_1 - (p + \mu + \delta_1)$ dan $\lambda_3 = -(\mu + \delta_2)$

Dari persamaan di atas diperoleh nilai eigennya adalah $\lambda_1 = -\mu$ dan $\lambda_3 = -(\mu + \delta_2)$. Karena dua akar di atas negatif , berarti

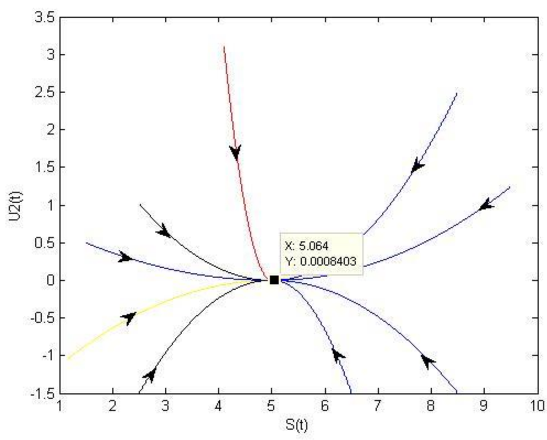
1. Jika $R_0 < 1$, maka $\beta_1 < (p + \mu + \delta_1)$ dan $\lambda_2 < 0$. Jadi Sistem (3.1) menunjukan stabil asimtotik lokal pada titik ekulibrium bebas Heroin.
2. Jika $R_0 > 1$, maka $\beta_1 > (p + \mu + \delta_1)$ dan $\lambda_2 > 0$. Jadi Sistem (3.1) tidak stabil pada titik ekulibrium bebas Heroin.
3. Jika $R_0 = 1$, maka $\beta_1 = (p + \mu + \delta_1)$ dan $\lambda_2 = 0$ belum bisa memberi informasi kestabilan (S^*, U_1^*, U_2^*). ■

Jadi jika β_1 yaitu peluang menjadi pemakai lebih kecil dari $p + \mu + \delta_1$ yaitu jumlah dari tingkat laju pengurangan individu akibat pemakai, kematian alami dan proporsi dari sebarng pemakai masu ke tahap pengobatan (reabilitasi) maka akan tercapai kestabilan bebas Heroin. Jika sebaliknya $\beta_1 \geq (p + \mu + \delta_1)$, maka tidak sepenuhnya akan tercapai kestabilan dan bahkan tidak akan terjadi kestabilan bebas Heroin.

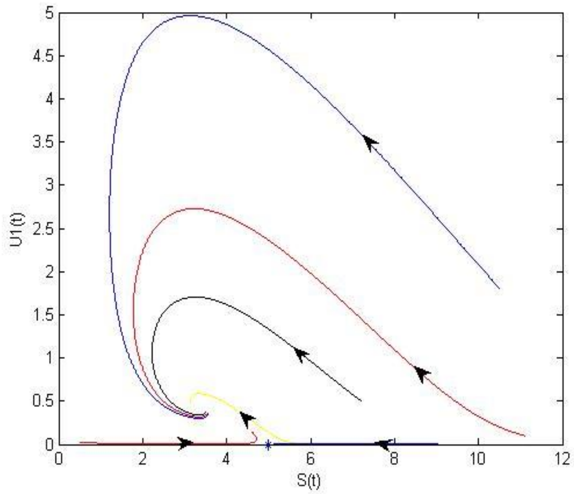
Berikut potret fase yang menunjukkan kestabilan Sistem (3.1) dengan $\beta_1 = 0.7$, $\beta_3 = 0.1$, $\Lambda = 1.0$, $\mu = 0.2$, $\delta_1 = 0.1$, $\delta_2 = 0.2$, $p = 0.5$, $N = 3.0$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. Potret fase dalam bentuk dimensi tiga terhadap S(t), U1(t) dan U2(t) dari Sistem (3.1) yang bebas Heroin



Gambar 4. Potret fase terhadap S(t) dan U2(t) dari Sistem (3.1) dengan titik ekuilibrium bebas Heroin $\left(S^{*}, U_{2}^{*}\right) = (5, 0)$



Gambar 5. Potret fase terhadap S(t) dan U1(t) dari Sistem (3.1) dengan titik ekuilibrium bebas Heroin $\left(S^*, U_1^*\right) = (5, 0)$

D. SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa jika β_1 yaitu peluang menjadi pemakai lebih kecil dari $p + \mu + \delta_1$ yaitu jumlah dari tingkat laju pengurangan individu akibat pemakai, kematian alami dan proporsi dari sebarng pemakai masu ke tahap pengobatan (rehabilitasi) maka akan tercapai kestabilan bebas Heroin. Jika sebaliknya, maka tidak sepenuhnya akan tercapai kestabilan dan bahkan tidak akan terjadi kestabilan bebas Heroin.

Permasalahan-permasalahan lain yang perlu dikembangkan antara lain analisis prilaku kualitatif disekitar titik ekuilibrium bebas Heroin dan ekuilibrium endemik non-trivial serta aplikasi pada masalah yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., 1994. *Elementary Linear Algebra 7th ed.* Jhon Wiley ang Sons, Inc. New York.

C. Castillo-Chavez, dan B. Song. 2004. *Dynamical models of tuberculosis and their applications*, Math. Biosci. Eng. 1 (2).

Emma, dan Catherine. 2007. *Heroin epidemics, treatment and ODE modelling*. Department of Mathematics, NUI Maynooth, Co., Kildare, Ireland.

Efri W. 2007. *Remaja dan permasalahannya : Bahaya merokok, penyimpangan seks pada Remaja, dan bahaya penyalahgunaan Minuman keras/narkoba*. Universitas padjadjaran Fakultas ilmu keperawatan Jatinangor.

F. Brauer, dan C. Castillo-Chavez. 2000. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer.

J.D. Murray. 2004. *Mathematical Biology I and II*. Springer.

J.D. Murray. *Panduan Sehat Untuk Remaja*. Remaja Sehat dot com.

J.D. Murray. "*Matrix Analysis for Scientists and Engineers*" Alan J. Laub. Buy this book from SIAM at www.ec-securehost.com/SIAM/ot91.html

Li, M.Y., Graef, J.R., Wang, L., Karsai, J., *Global Dynamics of a SEIR Model with Varing Total Population Size*, Math. Biosci. http://www.u/cache/cs/4029/http:zSzzSzwww2.msstate.eduzSz

Olsder, G.J., 1994. *Mathematical System Theory*. Fakulty of Mathematics and Informatics Delft University of Technlogy. Netherlands.

Perko, L. 1991. Differential Equation And Dinamical System. New York : Springer-Verlag.

Kocak, H. Dan Hole, J.K. 1991. Dynamical And Bifurcation. New York : Springer-Verlag.

Wiggins, S., 1990, *Introduction to applied nonlinear dynamical system and chaos*, Springer - Verlag, New York.