βeta
Vol. 5 No. 1 (Mei) 2012, Hal. 75-80

p-ISSN: 2085-5893 / e-ISSN: 2541-0458
http://jurnalbeta.ac.id

MODEl PERSAMAAN DIFERENSIAL STOKASTIK UNTUK PROSES *PRENDIVILLE*

Granita

Abstrak: Suatu model yang banyak digunakan untuk mendekati fenomena alam adalah model persamaan diferensial stokastik, model ini banyak digunakan dalam populasi biologi. Model stokastik yang akan dibahas pada tulisan ini adalah proses Prendiville kelahiran dan kematian logistik. Persamaan Forward Folmogorof atau Fokker Plank digunakan untuk menemukan Model Persamaan Diferensial Stokastik (PDS) dari proses Prendeville ini, selain itu ditemukan juga solusi eksplisitnya, fungsi mean dan fungsi variansi.

Kata Kunci: *Proses Prendiville; Persamaan Forward Kolmogorof; Persamaan Diferensial Stokastik*

A. PENDAHULUAN

Banyak penomena fisik di alam dapat direpresentasikan dan lebih dipahami dengan menggunakan model matematika, model stokhastik adalah salah satunya. Model ini adalah suatu model yang paling banyak digunakan dalam populasi biologi, keunggulan model ini karena dianggap paling mendekati fenomena yang terjadi, sehingga penelitian dalam model stokastik berkembang dengan sangat pesat. Suatu model stokastik yang dibuat untuk mendekati penomena alam akan dipengaruhi oleh faktor *"noise"* sehingga pemilihan model Persamaan Diferensial Stokastik (PDS) diperlukan disini.

Dalam penelitian ini ada dua jenis model stokastik yang akan digunakan yaitu CTMC (*Continuous-time Markov Chain*) dan SDE (*Stochastic Differential Equation*) atau yang kita sebut dengan PDS. Kedua model ini dibedakan pada pendefinisian variabelnya yaitu diskret atau kontinu yang digunakan untuk ukuran populasi ataupun waktu. Di dalam model CTMC variabel waktunya adalah kontinu tetapi variabel keadaannya adalah diskret sedangkan untuk model PDS didasarkan pada proces diffusi dimana kedua variabelnya adalah kontinu.

Model stokastik pertumbuhan populasi yang akan dibahas adalah proses *Prendiville*. Di dalam proses *Prendiville* rata-rata kelahiran adalah fungsi (linier) penurunan ukuran populasi. Model menggambarkan populasi mandiri di mana reproduksi dihambat oleh kepadatan penduduk. Matis & Kiffe (1996) mengatakan:

> *We are not able to identify any natural population with a decreasing birth rate over the whole range of population size. However, we suggest that the Prendiville generalization holds great promise for modeling natural populations when the standard linear increasing rate in the early phase of population growth is joined with a linearly decreasing (Prendiville) rate in the latter phase of growth.*

Pembahasan tentang proses *Prendiville* dapat kita temukan diantaranya; (Parthasarathy & Kumar, 1994), (Matis & Kiffe, 1996), (Qi Zheng, 1998), (Q Zheng 1998a). Semua tulisan yang disebutkan membahas proses *Prendiville* dengan menggunakan model stokastik CTMC. Sejauh ini penulis belum menemukan pembahasan proses *Prendiville* dengan menggunakan PDS, oleh karena itu penulis tertarik untuk menggunakan model stokastik PDS untuk proses *Prendiville*.

Proses *Prendiville* yang dibahas pada tulisan ini adalah model kelahiran dan kematian logistik atau model kelahiran dan kematian linier yang terbatas (di bawah dan di atas) untuk satu dimensi. Terbatas di bawah karena kita menganggap sudah ada sejumlah populasi tertentu pada waktu *t* dan terbatas diatas pada suatu nilai yang biasa disebut "*carrying capasity"* disebabkan karena kepadatan penduduk. Model PDS Kelahiran kelahiran dan kematian linier tanpa batas atas telah dibahas secara umum oleh Allen, L.J.S & Allen, E.J. (2003) dan Allen, E. J(2007).

Langkah awal yang akan dilakukan yaitu menyajikan proses Prendiville dengan menggunakan model CTMC setelah itu merubahnya menjadi model PDS, cara yang akan digunakan untuk menghubungkan kedua model adalah dengan menggunakan persamaan *Forward Kolmogorov* atau persamaan *Fokker Plank,* sehingga persamaan ini sebagai jalan untuk mendapatkan model PDS. Setelah ditemukan model

PDS untuk proses *Prendiville* akan dicari solusi eksplisitnya kemudian menunjukkan fungsi mean dan fungsi variansinya.

B. PEMBAHASAN

Suatu proses *Prendiville* $\{X(t), t \geq 0\}$ adalah CTMC, yang mana λ_n dan μ_n rata-rata transisi untuk keadaan *n*, satu ke atas dan satu ke bawah. Misalkan L dan M bilangan bulat non negatif yang memenuhi $0 \leq L < M < \infty$. Rata-rata transisi didefinisikan pada $L \leq n \leq M$, sebagai berikut: $\lambda_n = \lambda(M-n)$ dan $\mu_n = \mu(n-L)$. Misalkan $X(t)$ menunjukkan ukuran populasi pada waktu t dan $X(0) = x_0$ ukuran populasi awal. Misalkan juga $p_n(t)$ adalah peluang jumlah populasi sebanyak *n* pada waktu t maka diperoleh

$$p_n(t+h) = p_n(t) - \big((M\lambda - L\mu) + (\mu - \lambda)n\big)hp_n(t) + \lambda\big(M-(n-1)\big)hp_{n-1}(t) + \mu\big((n+1)-L\big)hp_{n+1}(t) + O(h)$$

Bila $h \to 0$ maka turunannya adalah

$$p_n'(t) = -\big((\mu-\lambda)n + M\lambda - L\mu\big)p_n(t) + \lambda\big(M-(n-1)\big)p_{n-1}(t) + \mu\big((n+1)-L\big)p_{n+1}(t) \quad (1)$$

Persamaan ini merupakan persamaan *Forward Kolmogorov*

Karena $p_n(t)$ $(n = L, \dots, M)$ dibawah proses *Prendiville* maka menurut Takashima (1956), proses ini mengikuti distribusi *Binomial* berikut

$$p_n(t) = \binom{M-L}{n-L}\left[\frac{\lambda(1-e^{-(\mu+\lambda)t})}{\mu+\lambda}\right]^{n-L}\left[\frac{\lambda e^{-(\mu+\lambda)t}+\mu}{\mu+\lambda}\right]^{M-n}$$

Masih menurut Takasima $X(t)$ adalah penjumlahan konstanta L dengan peubah acak $\tilde{X}(t)$, sehingga

$$\tilde{X}(t) \sim Bin\left(M-L, \frac{\lambda\left(1-e^{-(\mu+\lambda)t}\right)}{\mu+\lambda}\right)$$

Untuk menghitung fungsi mean $E[X(t)] = E[L + \tilde{X}(t)]$, diperoleh

$$E[X(t)] = L + (M-L)\left(\frac{\lambda\left(1-e^{-(\mu+\lambda)t}\right)}{\mu+\lambda}\right)$$
$$= L + \frac{\lambda(M-L)}{\mu+\lambda}\left(\left(1-e^{-(\mu+\lambda)t}\right)\right)$$

Dengan cara yang serupa diperoleh fungsi variansi $Var(X(t)) = Var\left(L + \tilde{X}(t)\right) = Var\left(\tilde{X}(t)\right)$ yaitu

$$Var(X(t)) = (M - L)\left(\frac{\lambda\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right)}{\mu+\lambda}\right)\left(\frac{\lambda e^{-(\mu+\lambda)t} + \mu}{\mu+\lambda}\right)$$

$$= \frac{\lambda(M-L)}{(\mu+\lambda)^2}\left(\mu\left(1 - e^{-2(\mu+\lambda)t}\right) - (\mu - \lambda)\left(e^{-(\mu+\lambda)t} - e^{-2(\text{ì}+\text{ë})t}\right)\right)$$

Setelah kita melihat proses *Prendiville* untuk model CTMC selanjutnya akan dibahas proses *Prendeville* untuk model PDS. Lihat kembali persamaan *Forward Kolmogorof* (1),

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = p_n'(t) = -\left((\text{ì} - \text{ë})n + M\text{ë} - L\text{ì}\right)p_n(t) + \text{ë}\left(M - (n-1)\right)p_{n-1}(t) + \text{ì}\left((n+1) - L\right)p_{n+1}(t)$$

$$= -\frac{1}{2}[p_{n+1}(t)(-(n+1)(\text{ì} + \text{ë}) + M\text{ë} + L\text{ì}) - p_{n-1}(t)(-(n-1)(\text{ì} + \text{ë}) + M\text{ë} + L\text{ì})] + -\frac{1}{2}[p_{n+1}(t)\left((n+1)(\text{ì} - \text{ë}) + M\text{ë} - L\text{ì}\right) - 2p_n(t)(n(\text{ì} - \text{ë}) + M\text{ë} - L\text{ì}) + p_{n-1}(t)\left((n-1)(\text{ì} - \text{ë}) + M\text{ë} - L\text{ì}\right)]$$

Suatu pendekatan persamaan differensial dari persamaan diatas adalah sebuah persamaan diferensial parsial dari persamaan *Forwad Kolmogorov* atau biasa disebut persamaan *Fokker Plank*:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial(-(\text{ì} + \text{ë})x + M\text{ë} + L\text{ì})p(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\left((\text{ì} - \text{ë})x + M\text{ë} - L\text{ì}\right)p(t,x)}{\partial x^2}$$

Persamaan ini berhubungan dengan proses diffusi yang merupakan model PDS dari proses *Prendiville* (kelahiran dan kematian logistik), sehingga kita menemukan model PDS berikut;

$$dX(t) = (-(\text{ì} + \text{ë})X(t) + M\text{ë} + L\text{ì})dt + \sqrt{(\text{ì} - \text{ë})X(t) + M\text{ë} - L\text{ì}}\, dW(t)$$

untuk suatu nilai awal $x_0 = L$, dimana $W(t)$ adalah *Brownian motion* yang turunannya mendefinisikan "*noise*" yang disebutkan diawal tulisan ini.

Dengan menggunakan rumus *Itô* untuk PDS di temukan solusi eksplisitnya dari model PDS untuk proses P*rendeville* yaitu

$$X(t) = Le^{-(ì+ë)t} + \frac{Më + Lì}{ì + ë}\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right)$$
$$+ \int_0^t e^{(ì+ë)(u-t)} \sqrt{(ì - ë)X(u) + Më - Lì}\, dW(u)$$

Selanjutnya kita akan mencari fungsi mean dan fungsi variansinya. Dengan menggunakan sifat-sifat dari model PDS lihat (Iacus, 2008) h.33, kita menemukan fungsi mean

$$E[X(t)] = E[Le^{-(ì+ë)t} + \frac{Më + Lì}{ì + ë}\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right)$$
$$+ \int_0^t e^{(ì+ë)(u-t)} \sqrt{(ì - ë)X(u) + Më - Lì}\, dW(u)]$$
$$= Le^{-(ì+ë)t} + \frac{Më + Lì}{ì + ë}\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right)$$
$$= L + \frac{ë(M - L)}{\mu + \lambda}\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right)$$

dan fungsi variansi

$$Var\big(X(t)\big) = Var\ [Le^{-(ì+ë)t} + \frac{Më + Lì}{ì + ë}\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right) +$$
$$\int_0^t e^{(ì+ë)(u-t)} \sqrt{(ì - ë)X(u) + Më - Lì}\, dW(u)]$$
$$= e^{-2(ì+ë)t} \int_0^t E\left[e^{2(ì+ë)s}\big((ì - ë)X(s) + Më - Lì\big)\right] ds$$
$$= \frac{ë(M-L)}{(ì+ë)^2}\Big(ì\big(1 - e^{-2(ì+ë)t}\big) - (ì -$$
$$ë)\big(e^{-(ì+ë)t} - e^{-2(ì+ë)t}\big)\Big)$$

Kita dapat melihat mean dan variansi kedua model ini adalah sama.

C. KESIMPULAN

Model persamaan diferensial stokastik untuk *Prendeville* dapat diperoleh dari persamaan *Forward Kolmogorov* dan ditemukan juga solusi eksplisitnya, dari pengecekan untuk fungsi nilai mean dan variansi menunjukkan hasil yang sama dengan model CTMC sehingga ini menunjukkan bahwa model PDS dan solusi eksplisit yang diperoleh adalah benar.

DAFTAR PUSTAKA

Allen, E. J. (2007). *Modeling with Ito Stochastic Differential Equations*. The Nadtherland: Springer.

Allen, L. J. S. & Allen, E. J. (2003). A comparison of three different stochastic population models with regard to persistence time. *Theoretical Population Biology*, 64, 439–449.

Iacus, S. M. (2008). *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equation* New York: Springer.

Matis, J. H., & Kiffe, T. R. (1996). Stochastic Compartment Models with Prendville Growth Rates. *Mathematical Biosciences*, 138, 31–43.

Parthasarathy, P. R., & Kumar, B. K. (1994). Stochastic Compartmental Models with Prendville Growth Mechanisms. *Mathematical Biosciences*, 125(1995), 51–60.

Takashima, M. (1956). Note on Evolutionary Processes. *Bull. Math. Statist*, 7, 18–24.

Zheng, Qi. (1998). Note on the non-homogeneous Prendiville process. *Mathematical Biosciences*, 148, 1–5.

Zheng, Q. (1998a). A Stochastic Two-phase Growth Model. *Bulletin of Mathematical Biology*, 60, 151–161.