

PENURUNAN PERSAMAAN SAINT VENANT SECARA GEOMETRIS

Ayu Eka Pratiwi¹, Tri Widjajanti², Andi Fajeriani Wyrasti³

Abstrak: Penelitian ini bertujuan menurunkan Persamaan Saint Venant secara geometris. Adapun bentuk Persamaan Saint Venant yaitu:

$$B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta Q^2}{A} \right] + gA \frac{\partial z}{\partial x} + g \frac{Q|Q|}{AC^2R} = 0.$$

Persamaan Saint Venant digunakan untuk memodelkan aliran pada saluran terbuka seperti sungai dan digunakan juga untuk memodelkan penelusuran banjir. Penurunan Persamaan Saint Venant dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan integral dan secara geometris. Penurunan Persamaan Saint Venant secara geometris atau berdasarkan gambar penampang aliran suatu sungai secara horisontal dan vertikal digunakan untuk menggambarkan perubahan massa dan perubahan momentum. Perubahan massa dikaitkan dengan hukum kekekalan massa dan perubahan momentum dikaitkan dengan hukum kekekalan momentum yang diperoleh dari Hukum II Newton.

Kata kunci: *Persamaan Saint Venant; Persamaan Kontinuitas; Persamaan Momentum*

A. PENDAHULUAN

Persamaan Saint Venant merupakan persamaan diferensial parsial nonlinear yang hiperbolik. Menurut Makrup (2001), persamaan ini digunakan untuk jenis aliran tak langgeng satu dimensi artinya kondisi alirannya berubah-ubah terhadap waktu dan ruang, serta arah alirannya dianggap searah dengan alur sungai. Persamaan ini digunakan juga untuk memodelkan aliran pada saluran terbuka, seperti aliran sungai (Mulianto, 2003). Selain itu, persamaan ini digunakan untuk memodelkan penelusuran banjir (Soebagio, 2012).

¹ UNIPA, Indonesia

² UNIPA, Indonesia

³ UNIPA, Indonesia

Penelusuran banjir merupakan metode yang digunakan dalam menduga aliran di bagian hilir dengan menggunakan data aliran di bagian hulu yang dinyatakan dalam persamaan matematis (**Soebagio, 2012**). Ada dua cara penelusuran banjir menurut Soemarto (1999) yaitu penelusuran banjir secara hidrologis dan hidrolis. Penelusuran banjir secara hidrologis didasarkan pada hukum kontinuitas sedangkan penelusuran banjir secara hidrolis didasarkan pada hukum-hukum hidrolis. Penelusuran banjir secara hidrolis dapat didekati dengan persamaan Saint Venant (**Soebagio, 2012**).

Persamaan Saint Venant menggunakan konsep aliran yang secara tidak langsung berhubungan dengan bidang hidrolis dan mekanika fluida. Hidrolis dan mekanika fluida merupakan bagian dari mekanika terapan yang mempelajari statika dan dinamika dari cairan dan gas (**Soedradjat, 1983**). Dalam mempelajari dasar-dasar aliran fluida ada tiga konsep penting yang harus diperhatikan untuk menganalisis aliran fluida yaitu prinsip kekekalan massa (untuk mendapatkan persamaan kontinuitas), prinsip energi kinetik, dan prinsip momentum (**Giles, 1984**).

Prinsip kekekalan massa dan momentum menurut Makrup (2001) digunakan untuk membangun Persamaan Saint Venant. Penurunan persamaan Saint Venant yang terdiri dari persamaan keseimbangan massa dan persamaan keseimbangan momentum dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan integral dan secara geometris (**Makrup, 2001**). Penurunan dengan persamaan integral memiliki kelebihan pada penggunaan prinsip-prinsip integral untuk menggambarkan pergerakan fluidanya, tapi memiliki kelemahan yaitu memerlukan bentuk penampang melintang sungai untuk memperoleh Persamaan Saint Venant.

Penurunan Persamaan Saint Venant secara geometris dapat memecahkan permasalahan yang ada pada persamaan integral karena menjelaskan perubahan massa dan momentum berdasarkan gambar penampang aliran sungai secara horisontal dan vertikal.

LANDASAN TEORI

1. Sungai

Sungai adalah torehan di permukaan bumi yang merupakan penampung dan penyalur alamiah aliran air dan material yang dibawanya dari bagian hulu ke bagian hilir suatu daerah pengaliran ke tempat yang

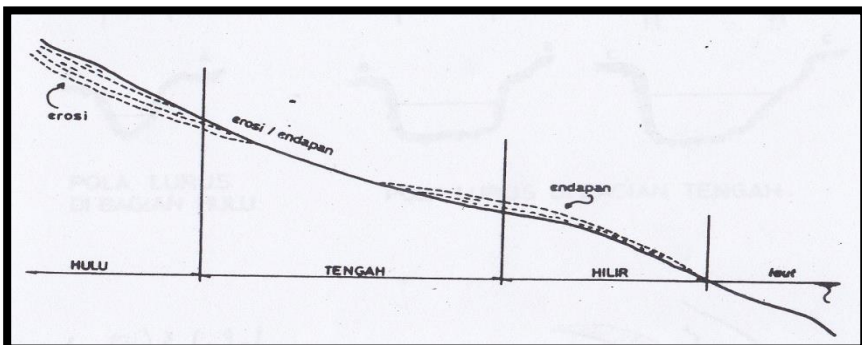
lebih rendah dan akhirnya bermuara ke laut (**Soewarno, 1991**). Ditinjau dari segi hidrologi, sungai mempunyai fungsi utama menampung curah hujan dan mengalirkannya sampai ke laut. Gambar 2.1 merupakan salah satu contoh gambar sungai yaitu Sungai Lembah Hijau yang berada di Kabupaten Manokwari tepatnya di Daerah Wosi Dalam.



Gambar 1. Sungai

2. Daerah Aliran Sungai (DAS)

Daerah Aliran Sungai (DAS) adalah daerah yang dibatasi punggung-punggungan gunung dimana air hujan yang jatuh pada daerah tersebut akan ditampung oleh punggung gunung tersebut dan dialirkan melalui sungai-sungai kecil ke sungai utama (**Asdak, 1995**). Daerah aliran sungai pada umumnya dibagi menjadi tiga daerah yaitu hulu, tengah, dan hilir. Daerah tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2. Sketsa Profil Memanjang Alur Sungai (Sumber : Puslitbang dalam Soewarno (1991))

Ciri-ciri DAS pada daerah hulu yaitu (1) daerah konservasi, (2) kerapatan drainase lebih tinggi, (3) daerah dengan kemiringan lereng besar (lebih besar dari 15%), dan (4) bukan daerah banjir. Sedangkan ciri-ciri DAS pada daerah hilir yaitu: (1) daerah pemanfaatan, (2) kerapatan drainase lebih kecil, (3) daerah dengan kemiringan lereng sangat kecil (kurang dari 18%), dan (4) daerah banjir (**Asdak, 1995**). Untuk daerah bagian tengah merupakan daerah peralihan dari bagian hulu dan hilir, kemiringan dasar sungai landai sehingga kecepatan aliran relatif lebih kecil dari pada bagian hulu. Pada dasarnya bentuk DAS bergantung pada pola aliran sungai. Bentuk DAS mempunyai arti penting dalam hubungannya dengan aliran sungai yaitu berpengaruh terhadap kecepatan debit aliran (**Soewarno, 1991**).

3. Geometri Alur Sungai

Geometri alur sungai menurut Soewarno (1991) terdiri dari:

- Kedalaman aliran (y) yaitu jarak vertikal titik terendah dari penampang sungai sampai ke permukaan air.
- Lebar puncak (T) yaitu lebar penampang sungai pada permukaan air.
- Luas basah (A) yaitu luas penampang melintang aliran yang tegak lurus arah aliran.
- Keliling basah (P) yaitu panjang garis perpotongan antara permukaan basah dengan bidang penampang melintang yang tegak lurus arah aliran. Atau keliling basah dapat juga diartikan sebagai panjang dari sisi saluran yang disentuh oleh cairan di dalamnya (**Soedrajat, 1983**). Misalnya untuk saluran yang berbentuk persegi panjang, keliling basahnya dapat dinyatakan sebagai berikut:

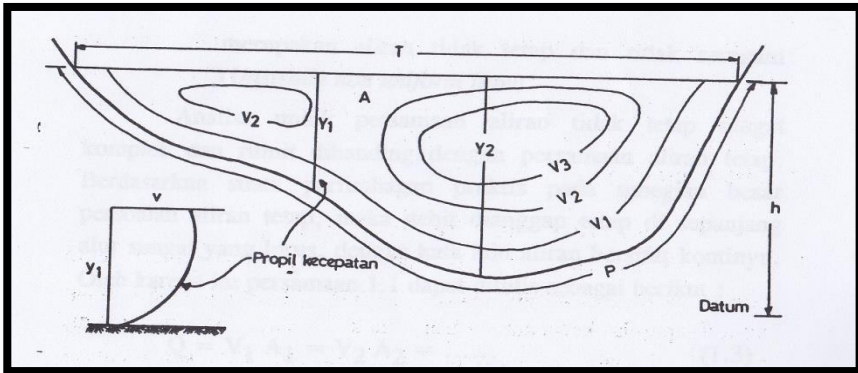
$$P = 2P_1 + L,$$

dengan

P_1 : panjang saluran,

L : lebar saluran.

- Jari-jari hidrolis (R) yaitu harga perbandingan antara (A) terhadap (P) atau dapat ditulis $R = \frac{A}{P}$.
- Kedalaman hidrolis (D) yaitu harga perbandingan (A) terhadap (T). Keterangan 1 sampai dengan 4 dapat diperjelas dengan Gambar 2.3 berikut.



Gambar 3. Sketsa Penampang Alur Sungai (Sumber : Soewarno, 1991)

4. Parameter Alur Sungai

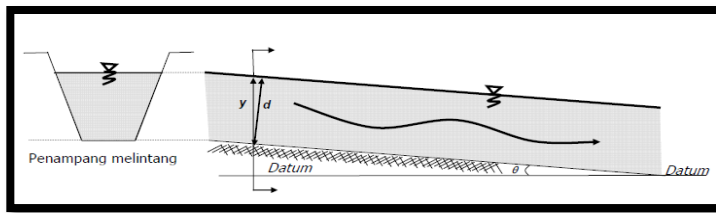
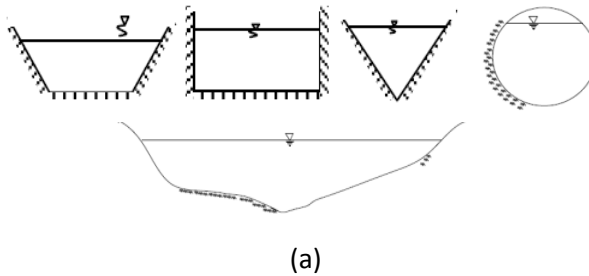
Parameter alur sungai yang perlu diketahui untuk menyatakan keadaan alur sungai menurut Soewarno (1991) adalah panjang dan lebar, kemiringan sungai, orde dan tingkat percabangan sungai, serta kerapatan sungai. Orde sungai adalah posisi percabangan alur sungai di dalam urutannya terhadap induk sungai di dalam suatu DAS. Kerapatan sungai adalah suatu angka indeks yang menunjukkan banyaknya anak sungai di dalam suatu DAS. Sedangkan untuk memberikan ciri pada gerak aliran, parameter yang digunakan yaitu debit, kecepatan, tekanan, dan kerapatan.

5. Bentuk Penampang Saluran Terbuka

Menurut Harseno dan Setdin (2007) pengertian penampang saluran dan jenis-jenis bentuk penampang saluran dapat dijelaskan sebagai berikut. Penampang saluran adalah penampang yang diambil tegak lurus arah aliran (penampang horisontal). Sedangkan penampang vertikal adalah penampang yang diambil secara vertikal. Saluran terbuka adalah saluran yang mengalir dengan permukaan bebas yang terbuka terhadap atmosfer. Bentuk penampang saluran vertikal terdiri dari empat bentuk yaitu:

- Bentuk trapesium adalah bentuk yang biasa digunakan untuk saluran-saluran irigasi atau saluran drainase karena menyerupai bentuk saluran alam.
- Bentuk persegi empat atau segitiga adalah penyederhanaan dari bentuk trapesium yang biasanya digunakan untuk saluran-saluran drainase yang melalui lahan yang sempit.

- c. Bentuk lingkaran biasanya digunakan pada perlintasan dengan jalan seperti gorong-gorong.
 - d. Bentuk tidak beraturan (saluran alam yaitu sungai).
- Penjelasan tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.4 berikut.



Gambar 4. (a) Penampang Saluran Terbuka dan (b) Penampang Saluran Terbuka Memanjang dan Vertikal (Sumber : Harseno dan Setdin, 2007)

6. Fluida

Fluida adalah zat-zat yang mampu mengalir dan yang menyesuaikan diri dengan bentuk wadah tempatnya. Fluida dapat digolongkan ke dalam bentuk cairan atau gas. Perbedaan antara cairan dan gas yaitu cairan tidak dapat dimampatkan dan bila terdapat di dalam suatu tempat maka cairan itu akan mengambil tempat sesuai dengan bentuk tempatnya. Sedangkan gas dapat dengan mudah dimampatkan dan dapat mengembang mengisi seluruh ruangan tempat tinggalnya dan tidak membentuk batas tertentu seperti cairan (Giles, 1984).

a. Aliran Fluida

Aliran fluida dapat diklasifikasikan dalam beberapa tipe seperti aliran langgeng, aliran tak langgeng, seragam, tak seragam, dan lain-lain (Makrup, 2001). Pengelompokkan ini didasarkan akibat adanya pengaruh kondisi ruang tempat terjadinya pengaliran. Aliran fluida dapat juga diklasifikasikan sebagai aliran satu, dua, atau tiga dimensi. Aliran tak

langgeng adalah aliran yang kondisinya berubah-ubah terhadap waktu dan ruang, dan aliran langgeng adalah aliran yang kondisinya tidak banyak berubah terhadap waktu dan ruang. Contoh aliran tak langgeng yaitu aliran sungai dan contoh dari aliran langgeng yaitu aliran pada saluran-saluran kecil (parit). Aliran satu dimensi adalah aliran dengan parameter fluida dan parameter aliran dianggap konstan di setiap potongan melintang saluran. Aliran dua dimensi adalah aliran dalam bidang vertikal maupun bidang horisontal, dan aliran tiga dimensi adalah aliran dengan parameter aliran bervariasi dalam tiga arah koordinat x , y , dan z (Makrup, 2001). Aliran seragam adalah aliran dengan kecepatan aliran tidak berubah menurut tempat dan aliran tidak seragam adalah aliran dengan kecepatan aliran berubah menurut tempat. Contoh dari aliran seragam yaitu aliran pada pipa yang mempunyai bentuk penampang yang tetap dan contoh dari aliran tak seragam yaitu aliran pada pipa yang mempunyai bentuk penampang tidak tetap (Streeter, 1996).

Ada tiga konsep penting yang harus diketahui dalam mempelajari aliran fluida yaitu prinsip kekekalan massa, prinsip energi kinetik, dan prinsip momentum (Giles, 1984). Karena jenis aliran yang diperhatikan adalah aliran sungai maka aliran ini diasumsikan sebagai aliran tak langgeng satu dimensi untuk jenis saluran terbuka (Makrup, 2001).

b. Rapat Massa Fluida

Rapat massa fluida (massa jenis/densitas) didefinisikan sebagai massa yang terkandung dalam satu satuan volume dari suatu zat atau materi, dalam hal ini massa fluida yang dimaksud adalah zat cair yang dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut:

$$\rho = \frac{m}{V},$$

dengan

ρ : rapat massa (kg/m^3) atau (g/cm^3),

m : massa (g atau kg),

V : volume dari suatu zat (m^3 atau cm^3).

Massa fluida menggambarkan suatu kuantitas yang dimiliki suatu zat atau materi. Kerapatan adalah suatu sifat karakteristik setiap zat atau materi. Misalnya emas murni dapat memiliki berbagai ukuran ataupun massa, tetapi kerapatannya akan sama untuk semuanya (Giancoli, 2001).

c. Tekanan Fluida

Tekanan adalah salah satu konsep penting yang banyak digunakan dalam pembahasan fluida. Tekanan didefinisikan sebagai besarnya gaya yang bekerja tegak lurus terhadap suatu permukaan dibagi dengan luas permukaan (**Giancoli, 2001**) atau dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$P = \frac{F}{A}, \quad (2.1)$$

dengan

P : tekanan (N/m^2),

F : gaya (N),

A : luas permukaan (m^2).

Tekanan fluida dipancarkan dengan kekuatan yang sama ke semua arah dan bekerja tegak lurus pada suatu bidang (**Giles, 1984**). Gaya F pada (2.1) dapat berupa gaya berat, sehingga (2.1) dapat berbentuk sebagai berikut:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho Vg}{A}, \quad (2.2)$$

dengan

P : tekanan (N/m^2),

F : gaya (N),

A : luas permukaan (m^2),

m : massa (g atau kg),

g : gravitasi (m/s^2),

ρ : rapat massa (kg/m^3) atau (g/cm^3),

V : volume dari suatu zat (m^3 atau cm^3).

Perubahan tekanan pada (2.2) dapat dinyatakan sebagai hasil kali rapat massa dengan perubahan kedalaman. Dengan memandang air sebagai zat cair yang mempunyai pemampatan yang sangat kecil, dapat dianggap bahwa rapat massa air sama untuk variasi kedalamannya (**Giancoli, 2001**). Tekanan (P) pada sebuah titik dibawah permukaan air adalah isotropis, artinya tekanan di titik tersebut sama untuk semua arah (**Makrup, 2001**). Tekanan ini dikenal dengan nama tekanan hidrostatik. Tekanan hidrostatik pada dinding berbentuk segitiga untuk kedalaman air = h adalah $P = \rho gh$ dan total gaya (F) yang bekerja pada dinding yang berbentuk segitiga adalah $F = \frac{1}{2} \rho gh^2$ (**Makrup, 2001**).

7. Koefisien Chezy dan Koefisien Koreksi

Koefisien Chezy adalah suatu koefisien yang digunakan dalam perhitungan debit aliran. koefisien ini digunakan akibat adanya kekasaran dinding dan dasar saluran sebagai pembatas tempat aliran yang berpengaruh langsung terhadap besarnya kecepatan (**Makrup, 2001**). Hubungan Koefisien Chezy dan debit aliran dapat dinyatakan dalam persamaan sebagai berikut:

$$Q = CA(Ri_e)^{0,5},$$

dengan

Q : debit aliran ($m^3/detik$),

C : koefisien chezy ($m^{0,5}/detik$),

A : luas tampang basah(m^2),

R : jari-jari hodrolik(m),

i_e : kemiringan garis energi dan didefinisikan $i_e = \frac{\bar{u}^2}{RC^2}$.

Debit aliran (Q) merupakan volume aliran yang mengalir pada suatu penampang melintang sungai persatuan waktu atau $Q = Av$ (**Asdak, 1995**). Pengukuran debit adalah pengukuran luas penampang basah, kecepatan aliran dan tinggi muka air (**Soewarno, 1991**).

Garis energi adalah garis yang menyatakan ketinggian dari jumlah tinggi aliran yang dipengaruhi oleh kemiringan garis energi (S_f). Selain Koefisien *Chezy* yang digunakan dalam pembahasan, terdapat juga koefisien koreksi (β). Koefisien ini menurut Streeter (1996), digunakan karena kecepatan bervariasi pada penampang melintang aliran (menggunakan kecepatan rata-rata). Berikut bentuk koefisien koreksi.

$$\beta = \frac{1}{B\bar{u}^2} \int_0^B u^2 dy,$$

dengan

B : lebar permukaan aliran(m),

$\bar{u}$: kecepatan rata-rata aliran dalam satu penampang melintang sungai (m/s),

u : kecepatan rata-rata kedalaman (m/s).

8. Hukum Kekekalan Massa

Hukum kekekalan massa menurut Streeter (1996) menyatakan massa di dalam suatu sistem adalah tetap konstan terhadap waktu yang dinyatakan sebagai

$$\frac{dm}{dt} = 0.$$

Hukum ini digunakan untuk membangun persamaan keseimbangan massa. Hukum ini dapat juga dinyatakan sebagai laju perubahan massa air persatuan waktu sama dengan laju bersih dari massa air tersebut **(Streeter, 1996)**.

9. Hukum II Newton

Hukum II Newton menyatakan bahwa gaya total yang bekerja pada suatu massa berbanding lurus dengan laju perubahan momentum dari massa yang bersangkutan **(Makrup, 2001)**. Hukum ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$F = \frac{d(mv)}{dt}.$$

10. Momentum

Momentum sebuah benda didefinisikan sebagai perkalian antara massa benda dan kecepatannya. Momentum biasanya dinyatakan dengan simbol P . Jika m menyatakan massa benda dan v menyatakan kecepatan, maka momentum P dari benda tersebut adalah $P = mv$. Contoh sebuah mobil yang bergerak cepat mempunyai momentum yang lebih besar dibandingkan mobil yang bergerak lambat bila keduanya memiliki massa yang sama. Untuk mengubah momentum dari suatu benda, diperlukan gaya untuk memperbesar, memperkecil atau mengubah arahnya. Pada fluida bergerak, momentum diperlukan untuk mengubah fluida tersebut agar dapat mengalir **(Giancoli, 2001)**.

Newton menyatakan hukum keduanya dalam istilah momentum yang dibahasakan dalam bahasa modern yaitu "Laju perubahan momentum sebuah benda sebanding dengan gaya total yang dikerjakan padanya" **(Giancoli, 2001)**. Dapat dinyatakan sebagai

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t},$$

dengan

F : gaya total yang dikerjakan benda,

ΔP : hasil perubahan momentum yang terjadi dalam selang waktu Δt .

Hukum kekekalan momentum dapat juga dinyatakan sebagai gaya total yang bekerja terhadap suatu volume kontrol sama dengan laju perubahan momentum dalam volume kontrol persatuan waktu ditambah dengan laju bersih dari aliran momentum yang masuk dan keluar volume kontrol (Streeter, 1996).

Selanjutnya akan dibahas tentang dasar-dasar matematika yang berkaitan dengan pembahasan antara lain yaitu nilai mutlak, limit, turunan, integral, dan persamaan diferensial parsial (PDP).

11. Nilai Mutlak

Pada subbab ini akan dijelaskan definisi nilai mutlak, contoh, dan sifat-sifat nilai mutlak.

Definisi 11.1 (Purcell dkk., 2003, hal. 15)

Nilai mutlak suatu bilangan real x dinyatakan dengan $|x|$, dan didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} |x| = x, & \text{jika } x \geq 0, \\ |x| = -x, & \text{jika } x < 0. \end{cases}$$

Sifat 11.3 (Sifat Nilai Mutlak)

Sifat-sifat nilai mutlak menurut Purcell dkk (2003) terdiri atas :

- i. $|ab| = |a||b|$,
- ii. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$,
- iii. $|a + b| \leq |a| + |b|$, (ketaksamaan segitiga)
- iv. $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

12. Limit

Limit adalah bagian terpenting dalam kalkulus karena merupakan pembeda antara kalkulus dengan cabang matematika lainnya, sehingga kalkulus dapat didefinisikan sebagai pengkajian tentang limit (Purcell dkk, 2003).

Definisi 12.1 (Purcell dkk., 2003, hal. 70)

Misalkan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$, yang berpadanan sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ asalkan $0 < |x - c| < \delta$; yakni

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Teorema 12.3 (Purcell dkk., 2003, hal. 76)

Misalkan f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c , dengan n bilangan bulat positif, dan k suatu konstanta, maka

- i. $\lim_{x \rightarrow c} k = k,$
- ii. $\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x),$
- iii. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x),$
- iv. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x).$

Teorema 12.4 (Purcell dkk., 2003, hal. 79)

Misalkan f, g , dan h adalah fungsi-fungsi yang memenuhi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk setiap x yang dekat ke c , $x \neq c$. Jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$, maka $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$.

13. Turunan

Kemiringan garis singgung dan kecepatan sesaat adalah dua hal yang berhubungan dengan turunan (Purcell dkk, 2003). Pada subbab ini akan dibahas tentang definisi turunan, definisi turunan parsial dan contoh dari kedua definisi tersebut.

Definisi 13.1 (Purcell dkk., 2003, hal. 111)

Turunan sebuah fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca "faksen") yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limit ini ada dan bukan ∞ atau $-\infty$.

Definisi 13.3 (Purcell dkk., 2003, hal. 256)

Andaikan f adalah fungsi dengan dua peubah x dan y . Jika y dianggap konstan, misalnya $y = y_0$, maka $f(x, y_0)$ adalah fungsi dengan peubah tunggal x . Turunannya di $x = x_0$ disebut turunan parsial f terhadap x di (x_0, y_0) dan dinyatakan sebagai $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Jadi,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Turunan parsial f terhadap y di (x_0, y_0) dinyatakan dengan $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ dan dirumuskan dengan

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

14. Integral

Matematika mempunyai banyak operasi balikan salah satunya yaitu integral yang merupakan balikan dari turunan (Purcell dkk, 2003). Pada subbab ini akan membahas tentang definisi integral tentu, Teorema Sifat Perbandingan, Teorema Sifat Keterbatasan, Teorema Dasar Kalkulus

Pertama (TDK I), Teorema Kelinearan Integral Tentu dan luas daerah menggunakan integral.

Definisi 14.1 (Purcell dkk., 2003, hal. 240)

Andaikan f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup $[a, b]$. Jika

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i \text{ ada,}$$

maka dikatakan f terintegrasi pada $[a, b]$. Lebih lanjut $\int_a^b f(x) dx$ disebut integral tentu (integral Riemann) f dari a ke b , dan diberikan oleh

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i.$$

Teorema 14.3 (Purcell dkk., 2003, hal. 250)

Jika f dan g terintegralkan pada $[a, b]$ dan jika $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap x dalam $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Teorema 14.4 (Purcell dkk., 2003, hal. 250)

Jika f terintegralkan pada selang $[a, b]$ dan $m \leq f(x) \leq M$ untuk setiap x dalam $[a, b]$, maka

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (2.17)$$

Selanjutnya akan dibahas tentang Teorema Dasar Kalkulus Pertama (TDK I), Teorema Kelinearan Integral Tentu dan luas daerah menggunakan integral.

Teorema 14.5 (Purcell dkk., 2003, hal. 251)

Misalkan f kontinu pada $[a, b]$ dan x merupakan sebuah titik (peubah) dalam (a, b) , maka

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

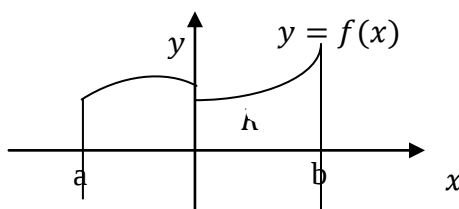
Teorema 14.6 (Purcell dkk., 2003, hal. 251)

Misalkan f dan g terintegralkan pada $[a, b]$ dan k konstanta, maka kf dan $f + g$ terintegralkan dan

- i. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx,$
- ii. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$ akibatnya
- iii. $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$

Luas Daerah Menggunakan Integral

Luas daerah menggunakan integral menurut Purcell dkk (2003) yaitu andaikan $y = f(x)$ sebuah kurva di bidang xy dan andaikan f kontinu dan tak negatif pada selang $a \leq x \leq b$. Tinjau daerah R (Gambar 2.7) yang dibatasi oleh grafik-grafik $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, dan $y = 0$. Anggaplah R sebagai daerah di bawah $y = f(x)$, antara $x = a$ dan $x = b$, maka luas $A(R)$ dapat dinyatakan sebagai $A(R) = \int_a^b f(x)dx$.



Gambar 6. Luas Daerah $A(R)$ (Sumber : Purcell dkk, 2003)

15. Persamaan Diferensial (PD)

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung turunan pertama atau lebih dari suatu fungsi (**Boyce dan Dprima, 2005**). Banyak permasalahan yang ada di dunia nyata baik dalam bidang teknik, ilmu fisika, maupun biologi menggunakan persamaan diferensial agar lebih matematis sehingga dapat mencari solusi atau penyelesaiannya. Persamaan diferensial menurut Purcell dkk (2003) terdiri atas persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Karena persamaan diferensial parsial digunakan pada penelitian ini, maka akan dijelaskan tentang persamaan diferensial parsial.

Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan diferensial yang memuat turunan parsial dari fungsi dengan dua atau lebih peubah bebas. Persamaan diferensial parsial dijumpai dalam kaitannya dengan berbagai masalah fisik dan geometris bila fungsi yang terlibat tergantung pada dua atau lebih peubah bebas. Bidang fisika penuh dengan masalah-masalah yang harus dimodelkan dengan persamaan diferensial parsial (**Kreyszig, 1993**). Persamaan diferensial parsial menurut Farlow (1982) dapat diklasifikasikan berdasarkan hal-hal sebagai berikut:

1. Orde dari PDP merupakan bilangan yang menunjukkan tingkat tertinggi dari turunan parsialnya.

- Contoh : $u_t = u_x$ (orde pertama)
 $u_t = u_{xx}$ (orde kedua)
 $u_t = u_{xxx} + \sin x$ (orde ketiga)
2. Jumlah variabel menunjukkan banyaknya variabel bebas pada persamaan diferensial parsial.
 Contoh : $u_t = u_{xx}$ (dua variabel yaitu x dan t)
 $u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$ (tiga variabel yaitu r, t, θ)
3. Persamaan diferensial parsial dapat disebut linear atau nonlinear. Dikatakan linear jika persamaan itu berderajat satu dalam peubah tak bebasnya (u) dan turunan parsialnya. Tidak ada perkalian bersama atau kuadrat dalam variabel tak bebasnya. Secara umum bentuk persamaan diferensial parsial linear berorde dua yaitu:
 $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G(x, y)$ (2.21)
 dengan A, B, C, D, E , dan F merupakan konstanta.
 Contoh : $u_{xx} + yu_{yy} = 0$ (linear)
 $x u_{xx} + yu_y + u^2 = 0$ (nonlinear)
4. Persamaan diferensial parsial dapat juga diklasifikasikan homogen atau nonhomogen. Contoh jika (2.21) $G(x, y) = 0$, maka (2.21) homogen, sedangkan jika (2.21) $G(x, y) \neq 0$, maka (2.21) nonhomogen.
5. Tipe persamaan diferensial parsial dapat dibedakan berdasarkan nilai diskriminan yaitu parabolik, hiperbolik, dan eliptik.
- Parabolik : $B^2 - 4AC = 0$
 Contoh : $u_t = u_{xx}$
 - Hiperbolik : $B^2 - 4AC > 0$
 Contoh : $u_{tt} = u_{xx}$
 - Eliptik : $B^2 - 4AC < 0$
 Contoh : $u_{xx} + u_{yy} = 0$

B. TEMUAN DAN PEMBAHASAN

1. Persamaan Saint Venant

Persamaan Saint Venant merupakan persamaan diferensial parsial berorde satu dengan variabel bebasnya yaitu x dan t serta variabel tak bebasnya yaitu h (kedalaman air) dan Q (debit air) untuk setiap titik di aliran sungai. Persamaan ini pertama kali dikemukakan oleh Barre de Saint Venant pada Tahun 1871 untuk penelusuran dinamis. Persamaan ini menurut Makrup (2001) digunakan pada aliran tak langgeng satu dimensi. Persamaan ini tersusun oleh dua persamaan dasar yaitu persamaan keseimbangan massa yang mengikuti hukum kekekalan massa dan persamaan keseimbangan momentum yang mengikuti hukum kekekalan momentum yang diperoleh dari Hukum II Newton (**Makrup, 2001**). Persamaan Saint Venant menurut Makrup (2001) digunakan sebagai persamaan dasar pada aliran sungai, karena persamaan ini menghitung debit aliran dan kedalaman air sebagai fungsi ruang dan waktu, serta aliran di sungai dianggap sebagai aliran yang arahnya searah dengan alur sungai, sehingga aliran ini diasumsikan sebagai aliran tak langgeng satu dimensi.

a. Asumsi-asumsi Persamaan Saint Venant

Karena Persamaan Saint Venant dapat digunakan pada aliran tak langgeng (**Makrup, 2001**) dan dapat juga memodelkan saluran terbuka seperti sungai (**Mulianto, 2003**), maka asumsi-asumsi yang digunakan dalam Persamaan Saint Venant yaitu:

1. Aliran satu dimensi.
2. Panjang sungai yang dipengaruhi oleh gelombang banjir umumnya lebih besar dari kedalaman air.
3. Percepatan vertikal diabaikan dan distribusi tekanan gelombang adalah tekanan hidrostatik.
4. Densitas atau kerapatan massa air konstan.
5. Dasar dan dinding saluran ditentukan tidak berubah-ubah untuk mempermudah pengamatan.
6. Kemiringan dasar saluran relatif kecil.

b. Parameter-Parameter pada Persamaan Saint Venant

Parameter-parameter yang digunakan pada Persamaan Saint Venant menurut Makrup (2001) dapat dilihat pada Tabel 3.1 berikut.

Tabel 3. Parameter-parameter pada Persamaan Saint Venant

No.	Parameter	Arti	Satuan
1.	ρ	Rapat massa air.	(kg/m^3) atau (g/cm^3) .
2.	Q	Debit aliran.	$m^3/detik$.
3.	z	Ketinggian permukaan aliran.	(m) .
4.	h	Kedalaman air pada suatu titik dan suatu waktu sepanjang B .	(m) .
5.	$\bar{h}$	Kedalaman rata-rata arah lebar sungai.	(m) .
6.	O	Keliling basah.	(m) .
7.	β	Koefisien koreksi.	-
8.	R	Jari-jari hidrolis.	(m) .
9.	$\bar{u}$	Kecepatan rata-rata aliran dalam satu penampang melintang sungai.	(m/s) .
10.	u	Kecepatan rata-rata aliran kedalaman.	(m/s) .
11.	C	Koefisien <i>chezy</i> .	$(m^{0,5}/s)$.
12.	F	Gaya-gaya yang bekerja pada aliran.	-
13.	A	Luas tampang basah.	(m^2) .
14.	B	Lebar permukaan aliran.	(m) .
15.	t	Waktu.	Sekon.
16.	g	Gravitasi.	(m/s^2) .

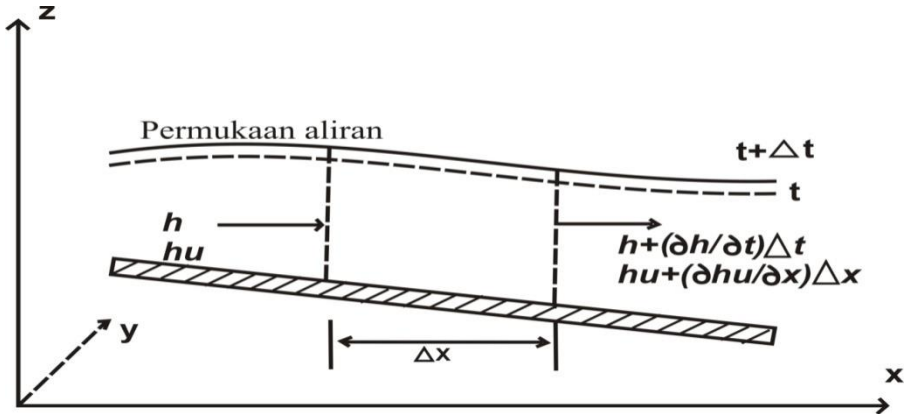
2. Penurunan Persamaan Saint Venant Secara Geometris

Persamaan Saint Venant yang terdiri dari dua persamaan dasar yaitu persamaan keseimbangan massa dan persamaan keseimbangan momentum, penurunannya dapat dilakukan secara geometris (berdasarkan gambar). Berikut langkah-langkah penurunan Persamaan Saint Venant.

a. Persamaan Keseimbangan Massa

Penurunan persamaan keseimbangan massa mengikuti hukum kekekalan massa yaitu laju perubahan massa fluida persatuan waktu

sama dengan laju bersih dari massa fluida tersebut (**Streeter, 1996**). Penjelasan tersebut dapat dilihat pada Gambar 7 berikut.



Gambar 7. Keseimbangan Aliran Massa Fluida (Sumber : Makrup, 2001)

Gambar 7 merupakan gambar yang menjelaskan dua hal yaitu perubahan massa fluida yang masuk ke dalam daerah sepanjang Δx dengan lebar Δy pada waktu Δt mengakibatkan perubahan ketinggian permukaan fluida dan perubahan massa fluida yang masuk dalam waktu Δt sama dengan nilai rata-rata aliran massa yang masuk dan keluar pada daerah sepanjang Δx dengan lebar Δy (**Makrup, 2001**). Perubahan massa fluida yang masuk dikurangi dengan massa fluida yang keluar sama dengan perubahan ketinggian permukaan fluida dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\rho h \Delta x \Delta y - \rho \left(h + \frac{\partial h}{\partial t} \Delta t \right) \Delta x \Delta y = -\rho \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta t. \quad (3.1)$$

Jika ρ dianggap konstan pada (3.1), maka diperoleh

$$h \Delta x \Delta y - \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta t - h \Delta x \Delta y = -\frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta t. \quad (3.2)$$

Perubahan massa fluida yang masuk dalam waktu Δt sama dengan nilai rata-rata aliran massa yang masuk dan keluar pada daerah sepanjang Δx dengan lebar Δy atau perubahan ini merupakan laju bersih dari aliran fluida dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\rho \left(hu + \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta t - \rho hu \Delta y \Delta t = \rho \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t. \quad (3.3)$$

Karena ρ dianggap konstan, maka (3.3) dapat berbentuk sebagai berikut:

$$hu\Delta y\Delta t + \frac{\partial hu}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta t - \rho hu\Delta y\Delta t = \frac{\partial hu}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta t. \quad (3.4)$$

Jika mengikuti hukum kekekalan massa (**Streeter, 1996**), maka (3.2) dan (3.4) dapat dibentuk sebagai berikut:

$$-\frac{\partial h}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta t = \frac{\partial hu}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta t, \quad (3.5)$$

Jika ruas kanan pada (3.5) dipindahkan ke ruas kiri dan dibuat sama dengan nol, maka diperoleh

$$-\left(\frac{\partial h}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta t + \frac{\partial hu}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta t\right) = 0, \quad (3.6)$$

Jika (3.6) dikalikan dengan (-1), maka diperoleh

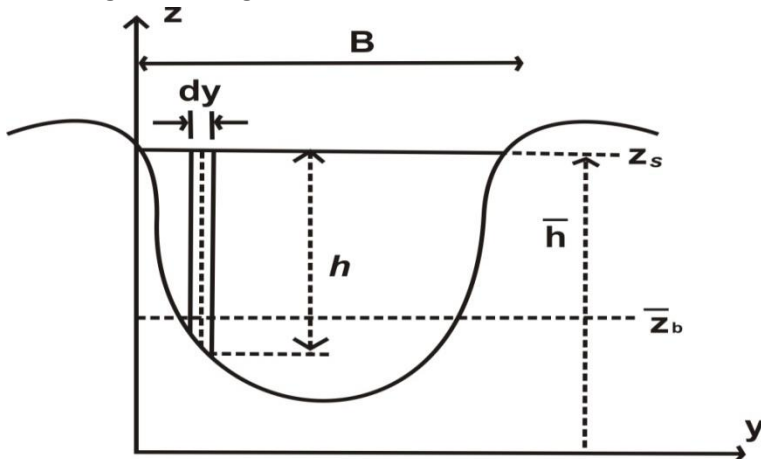
$$\frac{\partial h}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta t + \frac{\partial hu}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta t = 0. \quad (3.7)$$

Persamaan (3.7) menyatakan perubahan massa fluida dalam keadaan seimbang.

Jika (3.7) dibagi dengan $\Delta x\Delta y\Delta t$, maka diperoleh

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0. \quad (3.8)$$

Persamaan (3.8) merupakan persamaan yang diturunkan dengan melihat perubahan massa fluida secara horisontal tanpa melihat bentuk penampang melintang dari aliran sungai. Sehingga selanjutnya akan dibahas (3.8) dengan melihat bentuk penampang melintang aliran sungai. Perhatikan Gambar 8 berikut.



Gambar 8. Penampang Melintang Sungai (Sumber : Makrup, 2001)

Misalkan penampang melintang aliran sungai berbentuk seperti pada Gambar 8. Gambar 8 diperoleh dengan melihat aliran dalam arah y atau dalam arah lebar. Sehingga luas tampang basah aliran (liat

daerah selebar dy) dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan integral berikut:

$$A = \int_0^B h \, dy.$$

Misalkan kedalaman rata-rata air terhadap lebar permukaan aliran (B) menurut Makrup (2001) adalah

$$\bar{h} = \frac{A}{B} = \frac{1}{B} \int_0^B h \, dy,$$

dengan

$\bar{h}$: kedalaman rata-rata arah lebar sungai (m),

A : luas tampang basah (m^2),

B : lebar permukaan aliran (m),

h : kedalaman air pada suatu titik dan suatu waktu sepanjang B (m).

Jika h pada (3.8) disubstitusi dengan $\bar{h}$ dan diintegrasikan terhadap dy , maka diperoleh

$$\int_0^B \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{h}u}{\partial x} \right) dy = 0. \quad (3.9)$$

Jika ruas kiri pada (3.9) menggunakan Teorema 2.14.5 dan Teorema 2.14.6, maka diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{h} \int_0^B dy \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{h} \int_0^B u \, dy \right) = 0. \quad (3.10)$$

Misalkan menurut Makrup (2001) $\bar{u} = \frac{1}{B} \int_0^B u \, dy$, maka $\int_0^B u \, dy = \bar{u}B$. (3.11)

Jika (3.11) disubstitusi ke (3.10), maka diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} (B\bar{h}) + \frac{\partial}{\partial x} (B\bar{h}\bar{u}) = 0. \quad (3.12)$$

Karena perubahan $\bar{h}$ bergantung pada waktu (t) dan menurut Makrup (2001) $B\bar{h}\bar{u} = Q$, maka (3.12) dapat diperoleh sebagai berikut:

$$B \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \quad (3.13)$$

Jika $z_s = \bar{h} + \bar{z}_b$, maka $\bar{h} = z_s - \bar{z}_b$.

Karena $\bar{h} = z_s - \bar{z}_b$, maka (3.13) dapat ditulis sebagai berikut:

$$B \frac{\partial (z_s - \bar{z}_b)}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \quad (3.14)$$

Jika $\frac{\partial (z_s - \bar{z}_b)}{\partial t} = \frac{\partial z_s}{\partial t} - \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial t}$ dan disubstitusikan ke (3.14), maka diperoleh

$$B \left(\frac{\partial z_s}{\partial t} - \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial t} \right) + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \quad (3.15)$$

Berdasarkan asumsi bahwa dasar dan dinding saluran ditentukan tidak berubah-ubah, maka dapat dianggap $\frac{\partial \bar{z}_b}{\partial t} = 0$. Jika disubstitusikan ke (3.15), maka diperoleh

$$B \frac{\partial z_s}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \quad (3.16)$$

Jika dianggap permukaan air sama dengan permukaan aliran atau $z_s = z$, maka (3.16) dapat ditulis sebagai berikut.

$$B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (3.17)$$

dengan

B : lebar permukaan aliran (m),

z : ketinggian permukaan aliran (m),

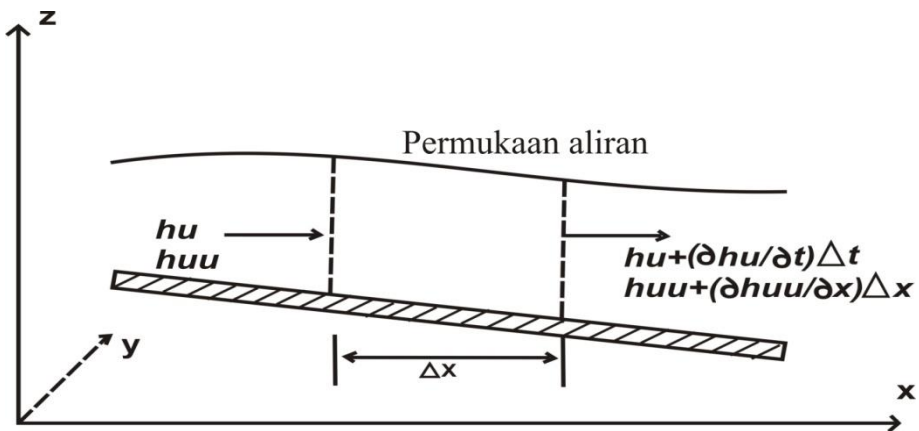
Q : debit aliran ($m^3/detik$).

Persamaan (3.17) disebut sebagai persamaan keseimbangan massa.

b. Persamaan Keseimbangan Momentum

Persamaan keseimbangan momentum terbentuk dengan mengikuti hukum kekekalan momentum yang diperoleh dari hukum II Newton. Newton menyatakan hukum keduanya dalam istilah momentum yaitu laju perubahan momentum sebuah benda sebanding dengan gaya total yang dikerjakan padanya (**Giancoli, 2001**). Dengan kata lain, hukum kekekalan momentum dapat dinyatakan sebagai gaya total yang bekerja terhadap suatu volume kontrol (daerah Δx) sama dengan laju perubahan momentum dalam volume kontrol persatuan waktu ditambah dengan laju bersih dari aliran momentum yang masuk dan keluar volume kontrol (**Streeter, 1996**).

Penjelasan tersebut dapat dilihat pada Gambar 3.3 berikut.



Gambar 9. Perubahan Momentum (Sumber : Makrup, 2001)

Gambar 9 menjelaskan dua hal yaitu perubahan gaya momentum fluida yang masuk ke dalam daerah sepanjang Δx dengan lebar Δy pada waktu Δt sama dengan laju bersih dari aliran fluida. Dan perubahan gaya momentum fluida dalam waktu Δt sama dengan nilai rata-rata dari aliran momentum yang keluar dikurangi dengan aliran momentum masuk pada daerah Δx dengan lebar Δy (Makrup, 2001). Bentuk perubahan gaya momentum yang dimaksud yaitu momentum yang keluar dikurangi dengan momentum yang masuk, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$F_1 = \rho \left(hu + \frac{\partial hu}{\partial t} \Delta t \right) \Delta x \Delta y - \rho hu \Delta x \Delta y. \quad (3.18)$$

Jika (3.18) diselesaikan, maka akan diperoleh

$$F_1 = \rho \frac{\partial hu}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta t. \quad (3.19)$$

Bentuk perubahan nilai rata-rata dari aliran momentum yang keluar dikurangi dengan aliran momentum masuk pada daerah Δx dengan lebar Δy (laju bersih aliran momentum) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$F_2 = \rho \left(hu + \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta t - \rho hu \Delta y \Delta t. \quad (3.20)$$

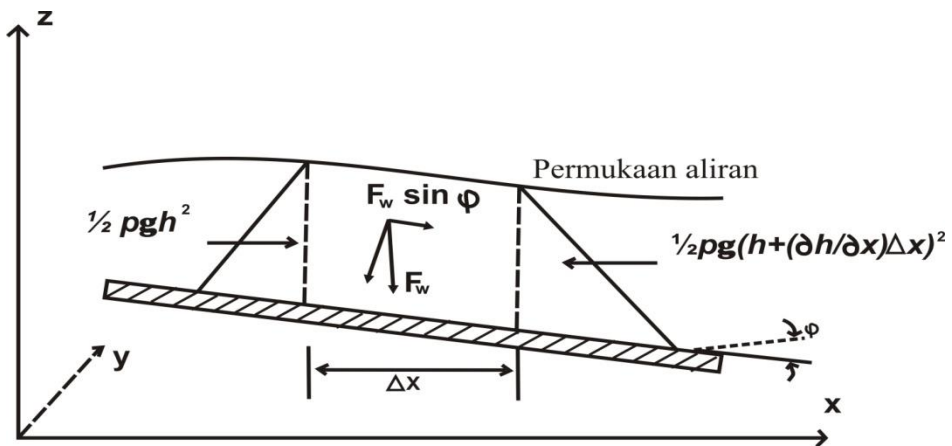
Jika (3.20) diselesaikan, maka diperoleh

$$F_2 = \rho \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t. \quad (3.21)$$

Perhatikan Gambar 3.4. Perubahan gaya momentum yang terjadi di dalam daerah Δx juga dipengaruhi oleh adanya tekanan hidrostatik.

Pada Gambar 10 terlihat bahwa tekanan hidrostatik menekan kedua sisi dari Δx . Sehingga perubahan momentum yang terjadi di dalam daerah Δx berbentuk sebagai berikut:

$$F_p = \frac{1}{2} \rho g \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right)^2 \Delta y \Delta t - \frac{1}{2} \rho g h^2 \Delta y \Delta t. \quad (3.22)$$



Gambar 10. Gaya Tekanan Hidrostatik (Sumber : Makrup, 2001)

Jika (3.22) diselesaikan, maka diperoleh

$$F_p = \frac{1}{2} \rho g h^2 \Delta y \Delta t + \rho g h \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t + \frac{1}{2} \rho g \left(\frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right)^2 \Delta y \Delta t - \frac{1}{2} \rho g h^2 \Delta y \Delta t. \quad (3.23)$$

Karena perubahan kedalaman terhadap Δx tidak terlalu menunjukkan perbedaan yang besar, sehingga menurut Makrup (2001) dapat dianggap $\left(\frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right)^2$ kecil sekali atau $\left(\frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right)^2 \approx 0$, maka diperoleh

$$F_p = \rho g h \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t. \quad (3.24)$$

Keseimbangan gaya momentum yang bekerja pada daerah sepanjang Δx dan selebar Δy menurut Makrup (2001) yaitu: $F_1 + F_2 + F_p = 0$. Sehingga (3.19), (3.21), dan (3.24) dapat dibentuk menjadi

$$\begin{aligned}
 F_1 + F_2 + F_p &= \rho \frac{\partial hu}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta t + \rho \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t + \\
 &\rho gh \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t \\
 &= \left(\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} \right) \rho \Delta x \Delta y \Delta t = 0. \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

Jika ρ dianggap konstan pada (3.25), maka diperoleh

$$\left(\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y \Delta t = 0. \quad (3.26)$$

Jika (3.26) dibagi dengan $\Delta x \Delta y \Delta t$, maka diperoleh

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (3.27)$$

Selain tekanan hidrostatik yang mempengaruhi perubahan momentum, pada Gambar 3.4 terlihat gaya-gaya yang bekerja pada volume kontrol (daerah Δx) tersebut. Gaya-gaya tersebut adalah gaya gesek dan gaya berat (**Makrup, 2001**).

1. Gaya akibat gesekan aliran di dasar saluran sepanjang Δx selebar Δy yang mengalir dalam waktu Δt adalah $F_g = \rho g h i_s \Delta x \Delta y \Delta t$. (3.28)

2. Gaya berat elemen fluida sepanjang Δx selebar Δy yang mengalir dalam waktu Δt adalah $F_w = \rho g h \Delta x \Delta y \Delta t \sin \varphi$. (3.29)

Menurut Makrup (2001) $\sin \varphi = i_b$. Jika disubstitusi ke (3.29), maka diperoleh

$$F_w = \rho g h \Delta x \Delta y \Delta t i_b. \quad (3.30)$$

Keseimbangan gaya berat dan gaya gesek menurut Makrup (2001) dapat dinyatakan sebagai $F_w - F_g = 0$. Sehingga dari (3.28) dan (3.29) diperoleh

$$\rho g h \Delta x \Delta y \Delta t i_b - \rho g h i_s \Delta x \Delta y \Delta t = 0, \quad (3.31)$$

Jika $\rho \Delta x \Delta y \Delta t$ pada (3.31) dikeluarkan, maka diperoleh

$$\rho \Delta x \Delta y \Delta t (g h i_b - g h i_s) = 0, \quad (3.32)$$

Jika dianggap ρ konstan pada (3.32) dan dibagi dengan $\Delta x \Delta y \Delta t$, maka diperoleh

$$g h i_b - g h i_s = 0. \quad (3.33)$$

Jika (3.27) dan (3.33) digabungkan berdasarkan hukum kekekalan momentum dari hukum II Newton (**Streeter, 1996**), maka diperoleh

$$\left(\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} - g h i_b + g h i_s \right) = 0. \quad (3.34)$$

Jika $S_0 = i_b$ dan $S_f = i_s = i_e$ (**Makrup, 2001**) disubstitusi ke (3.34), maka diperoleh

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = gh(S_0 - S_f), \quad (3.35)$$

dengan

$$S_0 = i_b \text{ (kemiringan dasar sungai),}$$

$$S_f = i_s \text{ (kemiringan garis energi).}$$

Jika menurut Makrup (2001) $i_b = \frac{\partial z_b}{\partial x}$ dan $h = z_s - z_b$ disubstitusi ke (3.34), maka diperoleh

$$\left(\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu u}{\partial x} + gh \left(\frac{\partial(z_s - z_b)}{\partial x} \right) - gh \frac{\partial z_b}{\partial x} + ghi_s \right) = 0, \quad (3.36)$$

Jika $\frac{\partial(z_s - z_b)}{\partial x} = \frac{\partial z_s}{\partial x} - \frac{\partial z_b}{\partial x}$, maka (3.36) dapat dibentuk sebagai berikut:

$$\left(\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu u}{\partial x} + gh \frac{\partial z_s}{\partial x} - gh \frac{\partial z_b}{\partial x} - \cancel{2gh \frac{\partial z_b}{\partial x}} + ghi_s \right) = 0, \quad (3.37)$$

Jika (3.37) diselesaikan, maka diperoleh

$$\left(\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu u}{\partial x} + gh \frac{\partial z_s}{\partial x} - 2gh \frac{\partial z_b}{\partial x} + ghi_s \right) = 0. \quad (3.38)$$

Jika berdasarkan asumsi pada Persamaan Saint Venant bahwa dasar dan dinding saluran ditentukan tidak berubah-ubah untuk mempermudah pengamatan, maka dapat dianggap $\frac{\partial z_b}{\partial x} = 0$, sehingga (3.38) dapat disederhanakan menjadi

$$\left(\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu u}{\partial x} + gh \frac{\partial z_s}{\partial x} + ghi_s \right) = 0. \quad (3.39)$$

Jika menurut Makrup (2001) $\tau_s = \rho ghi_s$ atau $i_s = \frac{\tau_s}{\rho gh}$ dan disubstitusi ke (3.39), maka diperoleh

$$\left(\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu u}{\partial x} + gh \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \tau_s \right) = 0. \quad (3.40)$$

Penurunan (3.40) dapat disederhanakan lagi dengan melihat bentuk penampang melintang aliran sungai. Jika kedalaman aliran h diganti dengan $\bar{h}$ dan diintegrasikan terhadap arah lebar sungai, maka (3.40) dapat berbentuk sebagai berikut:

$$\int_0^B \left(\frac{\partial \bar{h} u}{\partial t} + \frac{\partial \bar{h} u u}{\partial x} + g \bar{h} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \tau_s \right) dy = 0. \quad (3.41)$$

Jika menggunakan Teorema 2.14.6 pada (3.41) untuk suku-suku pada ruas kirinya, maka diperoleh

$$\int_0^B \frac{\partial \bar{h} u}{\partial t} dy + \int_0^B \frac{\partial \bar{h} u u}{\partial x} dy + \int_0^B g \bar{h} \frac{\partial z_s}{\partial x} dy + \int_0^B \frac{1}{\rho} \tau_s dy = 0, \quad (3.42)$$

Jika menggunakan Teorema 2.14.5 pada (3.42), maka diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^B \bar{h} u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^B \bar{h} u^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^B g \bar{h} z_s dy + \frac{1}{\rho} \tau_s \int_0^B dy = 0. \quad (3.43)$$

Jika menurut Makrup (2001) $\int_0^B u \, dy = \bar{u}B$ dan $\int_0^B u^2 \, dy = \beta B \bar{u}^2$ disubstitusi ke (3.43), maka diperoleh

$$\frac{\partial B \bar{h} \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \beta B \bar{h} \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial z_s}{\partial x} g \bar{h} \int_0^B dy + \frac{1}{\rho} \tau_s \int_0^B dy = 0, \quad (3.44)$$

Jika $\int_0^B dy = B$ dan disubstitusi ke (3.44) untuk suku ke tiga, maka diperoleh

$$\frac{\partial B \bar{h} \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \beta B \bar{h} \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial z_s}{\partial x} g \bar{h} B + \frac{1}{\rho} \tau_s \int_0^B dy = 0. \quad (3.45)$$

Misalkan $\bar{h} = \frac{A}{B}$ dan $B = \frac{A}{\bar{h}}$, maka (3.45) dapat berbentuk

$$\frac{\partial B \bar{h} \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \beta \frac{A}{\bar{h}} \bar{h} \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial z_s}{\partial x} g \bar{h} B + \frac{1}{\rho} \tau_s \int_0^B dy = 0. \quad (3.46)$$

Jika $\bar{h} = \frac{A}{B}$ disubstitusi ke (3.46), maka diperoleh

$$\frac{\partial B \bar{h} \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \beta \frac{A}{\bar{h}} \frac{A}{B} \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial z_s}{\partial x} g \bar{h} B + \frac{1}{\rho} \tau_s \int_0^B dy = 0. \quad (3.47)$$

Jika nilai $\bar{u}^2$ pada (3.47) dijabarkan, maka diperoleh

$$\frac{\partial B \bar{h} \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \beta \frac{A}{\bar{h}} \frac{A}{B} \bar{u} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial z_s}{\partial x} g \bar{h} B + \frac{1}{\rho} \tau_s \int_0^B dy = 0, \quad (3.48)$$

Jika suku ke dua pada (3.48) diselesaikan, maka diperoleh

$$\frac{\partial B \bar{h} \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \beta \frac{A \bar{u}}{\bar{h}} \frac{A}{B} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial z_s}{\partial x} g \bar{h} B + \frac{1}{\rho} \tau_s \int_0^B dy = 0. \quad (3.49)$$

Jika $\bar{h} = \frac{A}{B}$ disubstitusi ke (3.49) dan diselesaikan, maka diperoleh

$$\frac{\partial B \bar{h} \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \beta \frac{A \bar{u}}{\bar{h}} \frac{A}{B} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial z_s}{\partial x} g \bar{h} B + \frac{1}{\rho} \tau_s \int_0^B dy = 0, \quad (3.50)$$

Jika $\frac{A \bar{u}}{\bar{h}} \frac{A}{B} \bar{u}$ pada (3.50) sama dengan $\frac{A \bar{u} A \bar{u}}{A}$, maka (3.50) dapat dibentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial B \bar{h} \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \beta \frac{A \bar{u} A \bar{u}}{A}}{\partial x} + \frac{\partial z_s}{\partial x} g \bar{h} B + \frac{1}{\rho} \tau_s \int_0^B dy = 0. \quad (3.51)$$

Jika $A \bar{u} = Q$ disubstitusi ke (3.51), maka diperoleh

$$\frac{\partial B \bar{h} \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta Q^2}{A} \right] + \frac{\partial z_s}{\partial x} g \bar{h} B + \frac{1}{\rho} \tau_s \int_0^B dy = 0. \quad (3.52)$$

Jika $\bar{h} B = A$ disubstitusi ke (3.52), maka diperoleh

$$\frac{\partial B \bar{h} \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta Q^2}{A} \right] + g A \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \tau_s \int_0^B dy = 0. \quad (3.53)$$

Suku $\frac{1}{\rho} \tau_s \int_0^B dy$ pada (3.53) dapat disederhanakan menjadi $\frac{0}{\rho} \tau_s$. Jika diketahui $h = \frac{A}{0}$ dan $\tau_s = \rho g h i_s$, maka (3.53) dapat menjadi

$$\frac{\partial B \bar{h} \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta Q^2}{A} \right] + gA \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \rho g h i_s \int_0^B dy = 0. \quad (3.54)$$

Jika h pada (3.54) diintegrasikan terhadap dy , maka diperoleh

$$\frac{\partial B \bar{h} \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta Q^2}{A} \right] + gA \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \rho g i_s \int_0^B h dy = 0. \quad (3.55)$$

Jika $\int_0^B h dy = A$ dan disubstitusikan ke (3.55), maka diperoleh

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta Q^2}{A} \right] + gA \frac{\partial z_s}{\partial x} + A g i_s = 0. \quad (3.56)$$

Karena $i_s = S_f$ dan menurut Arwin (2011) $S_f = \frac{\bar{u}^2}{C^2 R}$, maka (3.56) dapat berbentuk

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta Q^2}{A} \right] + gA \frac{\partial z_s}{\partial x} + gA \frac{\bar{u}^2}{C^2 R} = 0, \quad (3.57)$$

Jika $\bar{u} = \frac{Q}{A}$ disubstitusikan ke (3.57), maka diperoleh

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta Q^2}{A} \right] + gA \frac{\partial z_s}{\partial x} + gA \frac{Q^2}{A^2 C^2 R} = 0. \quad (3.58)$$

Jika $\frac{Q^2}{A^2 C^2 R} = \frac{Q^2}{A^2 C^2 R}$ dan disubstitusikan ke (3.58), maka diperoleh

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta Q^2}{A} \right] + gA \frac{\partial z_s}{\partial x} + gA \frac{Q^2}{A^2 C^2 R} = 0. \quad (3.59)$$

Jika (3.59) diselesaikan, maka diperoleh

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta Q^2}{A} \right] + gA \frac{\partial z_s}{\partial x} + g \frac{Q^2}{A C^2 R} = 0. \quad (3.60)$$

Jika dianggap $Q > 0$, maka (3.60) dapat dibentuk menjadi

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta Q^2}{A} \right] + gA \frac{\partial z_s}{\partial x} + g \frac{Q|Q|}{C^2 R} = 0. \quad (3.61)$$

Misalkan $z = z_s$, maka (3.61) dapat dibentuk menjadi

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta Q^2}{A} \right] + gA \frac{\partial z}{\partial x} + g \frac{Q|Q|}{A C^2 R} = 0. \quad (3.62)$$

Persamaan (3.62) dikenal sebagai persamaan keseimbangan momentum. Menurut Makrup (2001), pasangan (3.17) dan (3.62) dikenal dengan nama Persamaan Saint Venant.

C. SIMPULAN

Persamaan Saint Venant yang terdiri dari persamaan keseimbangan massa dan persamaan keseimbangan momentum atau berbentuk sebagai berikut:

$$B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta Q^2}{A} \right] + gA \frac{\partial z}{\partial x} + g \frac{Q|Q|}{A C^2 R} = 0.$$

Penurunan persamaannya dilakukan secara geometris (berdasarkan gambar penampang aliran secara horisontal dan vertikal) dengan langkah-langkah penurunan yaitu:

1. Memperhatikan penampang aliran secara horisontal untuk mendefinisikan perubahan massa dan perubahan momentum.
2. Mendefinisikan perubahan massa dalam keadaan seimbang berdasarkan hukum kekekalan massa dan perubahan momentum dalam keadaan seimbang berdasarkan hukum kekekalan momentum yang diperoleh dari Hukum II Newton.
3. Memperhatikan penampang aliran secara vertikal untuk mendefinisikan kembali perubahan massa dan momentum yang diperoleh sehingga membentuk persamaan keseimbangan massa dan persamaan keseimbangan momentum. Pasangan persamaan keseimbangan massa dan persamaan keseimbangan momentum dikenal dengan nama Persamaan Saint Venant.

DAFTAR PUSTAKA

- Arwin. 2011. **Penyelesaian Persamaan Saint Venant dengan Metode Numerik**. <http://bhupalaka.files.wordpress.com/2011/02/saint-venant-dengan-metode-numerik-061009.pdf>. (20 Mei 2013).
- Asdak, C. 1995. **Hidrologi dan Pengelolaan Daerah Aliran Sungai**. Gadjah Mada University Press. Yogyakarta.
- Boyce, W. E., dan R. C. DiPrima. 2005. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. John Wiley and Sons. New York.
- Farlow, S. J. 1982. **Partial Differential Equations for Scientists and Engineers**. John Wiley and Sons. New York.
- Giancoli, D. C. 2001. **Fisika Dasar Jilid 1**. Yuhilza H dan Irwan A., penerjemah. Erlangga. Jakarta.
- Giles, R. V. 1984. **Mekanika Fluida dan Hidraulika**. Herman W. S., penerjemah. Erlangga. Jakarta.
- Harseno, E., dan Setdin J. V. L. 2007. **Studi Eksperimental Aliran Berubah Beraturan pada Saluran Terbuka**.
- Kreyszig, E. 1993. **Matematika Teknik Lanjutan Buku I**. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.
- Makrup, L. 2001. **Dasar-Dasar Analisis Aliran di Sungai dan Muara**. Universitas Islam Indonesia Press. Yogyakarta.
- Mulianto, G. 2003. **Simulasi Aliran pada Saluran Terbuka dan Perubahan Dasar Saluran Akibat Pergerakan Sedimen Dasar (Bed Load)**. <http://digilib.itb.ac.id/files/JBPTITBSI/disk1/1/jbptitbsi-gdl-s2-2005-gunadimuli-16-2003-ts-1.pdf>. (19 Oktober 2013).

- Purcell, E. J., Dale V., dan Steven E. R. 2003. **Kalkulus Jilid Satu**. I Nyoman Susila, penerjemah. Erlangga. Jakarta.
- Purcell, E. J., Dale V., dan Steven E. R. 2003. **Kalkulus Jilid Dua**. I Nyoman Susila, penerjemah. Erlangga. Jakarta.
- Soebagio. 2012. **Penelusuran Banjir dengan Metode Regresi Polinomial**. http://atpw.files.wordpress.com/2013/03/a-1_atpw-2012_soebagio_penelusuran-banjir-dg-metode-regresi-polinomial.pdf. (10 Oktober 2013).
- Soedradjat. 1983. **Mekanika Fluida dan Hidrolika**. Nova. Bandung.
- Soemarto. 1999. **Hidrologi Teknik**. Erlangga. Jakarta.
- Soewarno. 1991. **Hidrologi Pengukuran dan Pengolahan Data Aliran Sungai (Hidrometri)**. Nova. Bandung.
- Streeter, V. L., dan E. Benyamin W. 1996. **Mekanika Fluida Jilid 1**. Arko P., penerjemah. Erlangga. Jakarta