

MODEL KAC WALKS UNTUK PERSAMAAN DIFUSI DIMENSI DUA

Irma Elisabeth Toto¹, Tri Widjajanti², Andi Fajeriani Wyrasti³

Abstrak: Penelitian ini bertujuan menurunkan Model Kac Walks dengan menggunakan Gerak Brown untuk memperoleh persamaan difusi dimensi dua. Difusi merupakan peristiwa mengalirnya atau berpindahnya suatu zat dalam pelarut dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah. Difusi dapat dimodelkan atau dinyatakan dalam bahasa matematika, yaitu persamaan difusi yang merupakan persamaan diferensial parsial. Ada beberapa metode yang diketahui untuk membentuk persamaan difusi, diantaranya adalah metode berdasarkan Hukum Fick dan berdasarkan Model Kac Walks. Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah Model Kac Walks yang pada dasarnya menggunakan Gerak Brown, yaitu pergerakan partikel-partikel yang bergerak terus menerus dalam suatu pola tak beraturan dengan kecepatan tertentu. Hasil dari penelitian ini adalah mendapatkan persamaan difusi dimensi dua dengan cara mengasumsikan pergerakan partikel, identifikasi pergerakan partikel secara probabilistik dan membentuk persamaan difusi dimensi dua dengan menggunakan distribusi peluang dan perluasan Teorema Deret Taylor. Adapun bentuk persamaan difusi dimensi dua adalah

$$v_t = \frac{1}{2} D(v_{xx} + v_{yy}).$$

Kata kunci: *Difusi; Gerak Brown; Model Kack Walks*

A. PENDAHULUAN

Difusi (pembauran) menurut Holman Tahun 1994 merupakan peristiwa mengalirnya atau berpindahnya suatu zat dalam pelarut dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah. Salah satu contoh sederhana dari difusi adalah pemberian [gula](#) pada cairan teh

¹ Universitas Negeri Papua, Indonesia

² Universitas Negeri Papua, Indonesia

³ Universitas Negeri Papua, Indonesia

tawar yang lambat laun cairanakan menjadi manis. Menurut Zauderer Tahun 1983, difusi dapat dimodelkan atau dinyatakan dalam bahasa matematika yaitu persamaan difusi yang merupakan persamaan diferensial parsial.

Persamaan difusi dapat digunakan untuk menggambarkan penyebaran perpindahan massa seperti penyebaran konsentrasi oksigen di suatu jaringan tubuh (Yulianti, 2009), polusi lingkungan (Haryanto, 2008), dan cairan kimia (Cahyono dan Kartono, 2006). Ada dua metode yang dapat digunakan untuk memperoleh persamaan difusi, yaitu berdasarkan Hukum Fick (Holman, 1994) dan berdasarkan Model Kac Walks (Zauderer, 1983).

Hukum Fick memiliki kelebihan pada penggambaran perpindahan massa yang jelas dari konsentrasi lebih tinggi ke konsentrasi yang lebih rendah, tapi memiliki kelemahan difusi akan berhenti jika sudah dalam keadaan setimbang (Holman, 1994). Sedangkan menurut Taylor dan Karlin Tahun 1998, Model Kac Walks memiliki kelebihan pada penggambaran gerakan-gerakan tidak beraturan dari partikel-partikel (Gerak Brown) yang terjadi tanpa henti, tetapi Model Kac Walks memiliki kelemahan pada perubahan arah kecepatan partikel yang tidak dapat diketahui. Sehingga solusi atas kelemahan tersebut adalah dengan menggunakan aspek peluang untuk mengetahui perubahan arah kecepatan partikel (Zauderer, 1983).

Salah satu penerapan mengenai Model Kac Walks dapat dilihat pada penelitian yang dilakukan oleh Eckstein, dkk Tahun 1999, menunjukkan bahwa Model Kac Walks dapat digunakan untuk memperoleh persamaan Telegraph. Selain itu, Model Kac Walks dapat juga digunakan untuk memperoleh persamaan difusi (Zauderer, 1983).

LANDASAN TEORI

A. Limit

Limit menurut Purcell dkk Tahun 2003 merupakan bagian penting dari kalkulus dan yang membedakan kalkulus dengan cabang matematika lainnya. Sehingga, kalkulus dapat didefinisikan sebagai pengkajian tentang limit. Dalam penelitian ini, limit yang digunakan adalah limit fungsi dua variabel atau terdapat di titik (a, b) .

Selanjutnya akan dibahas mengenai pengertian limit secara intuisi untuk dua variabel.

Definisi 1 (Purcell dkk, 2003, hal. 261)

Pernyataan $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ artinya bahwa jika (x,y) dekat tetapi berbeda dari (a,b) , maka $f(x,y)$ dekat ke L .

Limit ini mempunyai pengertian umum, yaitu nilai-nilai dari $f(x,y)$ akan semakin mendekati bilangan L ketika (x,y) mendekati (a,b) .

Contoh 2

Carilah nilai $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y)$.

Jawab :

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2) + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (y) \\ &= \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x) \right) \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x) \right) + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (y) \\ &= (0)(0) + 0 = 0.\end{aligned}$$

B. Notasi Sigma

Sigma (Σ) menurut Purcell dkk Tahun 2003 merupakan huruf kapital ke-18 dari bahasa Yunani yang menyatakan penjumlahan semua bilangan berbentuk seperti yang ditunjukkan dengan indeks i terus meningkat seiring peningkatan bilangan bulat positif, mulai dengan bilangan bulat yang diperlihatkan di bawah tanda Σ dan berakhir dengan bilangan bulat yang di atas tanda Σ tersebut.

Jika semua c_i dalam $\sum_{i=1}^n c_i$ mempunyai nilai sama, katakanlah c , maka

$$\sum_{i=1}^n c_i = \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n \text{ suku}}$$

atau

$$\sum_{i=1}^n c = nc \quad (2.1)$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai teorema yang berkaitan dengan sifat-sifat Σ .

Teorema 3 (Purcell dkk, 2003, hal. 227)

Andaikan $\{a_i\}$ dan $\{b_i\}$ menyatakan dua barisan dan c suatu konstanta, maka

$$i. \quad \sum_{i=1}^n c a_i = c \sum_{i=1}^n a_i ; \quad (2.2)$$

$$ii. \quad \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n (a_i) + \sum_{i=1}^n (b_i) ; \quad (2.3)$$

$$iii. \quad \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n (a_i) - \sum_{i=1}^n (b_i) . \quad (2.4)$$

a. Turunan Parsial

Turunan parsial menurut Purcell dkk Tahun 2003 mengandaikan f adalah fungsi dengan dua peubah x dan y . Jika y konstan, dan misalkan $y = y_0$, maka $f(x, y_0)$ adalah fungsi dengan peubah tunggal x . Turunannya di $x = x_0$ disebut turunan parsial f terhadap x di (x_0, y_0) dan dinyatakan sebagai $f_x(x_0, y_0)$ atau ditulis $\frac{\partial f}{\partial x}$. Karena turunan parsial dari suatu fungsi x dan y , secara umum adalah sebuah fungsi lain dari dua peubah yang sama tersebut, maka turunan tersebut dapat didefinisikan secara parsial terhadap x atau y , sehingga ada empat buah turunan parsial kedua (*second partial derivative*) yang dihasilkan dari f , yaitu

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ f_{xy} &= (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ f_{yx} &= (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Salah satu aturan yang sering digunakan untuk menurunkan persamaan diferensial parsial adalah aturan rantai. Jika $g = f(x, y)$, dengan x dan y adalah fungsi-fungsi dari s , maka dapat dinyatakan $\frac{dg}{ds}$, yang tentunya terdapat sebuah rumus untuk itu. Jadi, jika $x = x(s)$ dan $y = y(s)$ dapat didefinisikan di s , dan $g = f(x, y)$ dapat didiferensialkan di $(x(s), y(s))$, maka $g = f(x(s), y(s))$ dapat didiferensialkan di s dan

$$\frac{dg}{ds} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{ds} \quad (2.5)$$

b. Deret Taylor

Deret Taylor menurut Budhi Tahun 2001 adalah representasi fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Deret ini dapat dianggap sebagai limit polinomial Taylor. Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah terutama persamaan diferensial. Misalkan fungsi satu variabel f mempunyai turunan order ke $k + 1$ yang kontinu pada interval tutup $I = [p, q]$. Deret Taylor satu variabel untuk bilangan $a \in (p, q)$ dan $x \in [p, q]$, dapat dinyatakan sebagai berikut

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + R_k \quad (2.6)$$

dengan

$$R_k = \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt \quad (2.7)$$

Teorema 4 (Marsdendkk, 2000, hal. 185)

Misalkan $f(x, y)$ mempunyai turunan ketiga yang kontinu pada himpunan tutup D , maka untuk titik dalam (x_0, y_0) di D dan $(x, y) \in D$ berlaku

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \\ & \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \\ & (x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + \\ & \frac{1}{2} (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) + R_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

dengan $\lim_{h \rightarrow (0,0)} \frac{R_2}{\|h\|^2} = 0$ dan $h = (x - x_0, y - y_0)$.

c. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial (*differential equation*) menurut Boyce dan DiPrima Tahun 2005 adalah suatu persamaan yang mengandung turunan pertama atau lebih dari suatu fungsi. Persamaan diferensial dibagi dalam dua kelas yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Dalam penelitian ini, persamaan diferensial yang digunakan adalah persamaan diferensial parsial.

Definisi 5 (Boyce dan DiPrima, 2005, hal.19)

Suatu persamaan diferensial disebut persamaan diferensial parsial apabila persamaan diferensial tersebut memuat turunan parsial dari fungsi dua atau lebih peubah bebas.

Contoh 6

Persamaan-persamaan berikut merupakan contoh dari persamaan diferensial parsial.

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ Persamaan gelombang berdimensi satu
2. $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ Persamaan panas berdimensi satu
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Persamaan Laplace berdimensi dua
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ Persamaan Poisson berdimensi dua

$$5. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Persamaan Laplace berdimensi tiga}$$

Persamaan diferensial parsial sering dijumpai dalam berbagai masalah fisik dan geometris bila fungsi yang terlibat tergantung pada dua atau lebih peubah bebas (**Kreyszig, 1993**). Persamaan diferensial parsial mempunyai peran penting dalam berbagai bidang terlebih khususnya dalam bidang fisika. Sebagai contoh dari persamaan diferensial parsial adalah persamaan panas. Terapan dari persamaan panas antara lain meliputi hantaran panas dalam benda padat berupa lempengan dan batangan, difusi dari konsentrasi cairan atau gas, transmisi telegrafik pada kabel dari induksi, teori elektromagnetik, dll.

d. Peubah Acak

Sebuah fungsi bernilai real yang didefinisikan pada ruang contoh disebut peubah acak atau variabel acak. Peubah acak dinyatakan dengan huruf besar, misalnya X , sedangkan nilainya dinyatakan dengan huruf kecil, misalnya x .

Definisi 7 (Walpole, 2005, hal. 114)

*Suatu fungsi yang nilainya berupa bilangan real yang ditentukan oleh setiap unsur dalam ruang contoh disebut **peubah acak**.*

Contoh 8

Dua bola diambil satu demi satu tanpa dikembalikan dari suatu katung berisi 4 bola merah dan 3 bola hitam. Bila X menyatakan jumlah bola merah yang diambil maka nilai x yang mungkin dari peubah acak X adalah

Ruang Sampel	x
MM	2
MH	1
HM	1
HH	0

e. Distribusi Peluang Peubah Acak Diskrit

Distribusi peluang peubah acak diskrit menurut Walpole Tahun 2005 adalah sebuah tabel atau rumus yang mencantumkan semua kemungkinan nilai suatu peubah acak diskrit dengan peluangnya dan total peluang nilai semua kemungkinannya adalah 1.

Definisi 9 (Walpole dan Myers, 1995, hal. 54)

Himpunan pasangan terurut $(x, p(x))$ merupakan suatu fungsi peluang, fungsi massa peluang atau distribusi peluang peubah acak diskrit X apabila, untuk setiap kemungkinan hasil x memenuhi

$$1. \quad p(x) \geq 0 \quad (2.14)$$

$$2. \quad \sum_{i=1}^n p(x_i) = 1 \quad (2.15)$$

$$3. \quad P(X = x) = p(x) \quad (2.16)$$

Contoh 10

Satu mata uang logam dilemparkan sebanyak tiga kali. Peubah acak X yang menyatakan banyaknya muka yang muncul adalah

Tabel 1. Distribusi Peluang Pelemparan Uang Logam Sebanyak Tiga Kali.

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

4.

Perhatikan pada Tabel 2.1, x mencapai semua kemungkinan nilai sehingga peluangnya berjumlah 1.

Salah satu jenis dari distribusi peluang diskrit adalah distribusi binomial. Distribusi Binomial menurut Walpole Tahun 2005 adalah suatu distribusi peluang bagi peubah acak diskrit yang menyatakan banyaknya keberhasilan dalam n ulangan suatu percobaan binomial yang terdiri dari dua kejadian yang berkomplemen, seperti sukses-gagal, ya-tidak, naik-turun, kiri-kanan, dll.

Percobaan binomial menurut Walpole Tahun 2005 adalah percobaan yang memiliki ciri-ciri sebagai berikut :

1. Percobaanya terdiri atas n ulangan.
2. Setiap ulangan, hasilnya dapat digolongkan sebagai berhasil atau gagal.
3. Peluang berhasil, yang dilambangkan dengan p , untuk setiap ulangan adalah sama, tidak berubah-ubah.
4. Ulangan-ulangan itu bersifat bebas satu sama lain.

f. Nilai harapan Peubah Acak Diskrit

Nilai harapan atau harapan matematika dapat juga disebut ekspektasi. Nilai harapan disimbolkan $E(X)$ atau λ_x atau λ . Berikut definisi nilai harapan.

Definisi 11 (Walpole, 2005, hal. 132)

Misalkan X adalah peubah acak diskrit dengan sebaran peluang

X	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	...	$p(x_n)$

maka nilai harapan atau rata-rata bagi X adalah

$$\bar{x} = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i). \quad (2.17)$$

Contoh 12

Bila dua uang logam dilemparkan 16 kali dan X menyatakan banyaknya muncul gambar perlemparan, maka X dapat bernilai 0, 1 dan 2. Misalkan percobaan itu menghasilkan tidak ada gambar, satu gambar dan dua gambar, masing-masing peluang adalah $\frac{4}{16}$, $\frac{7}{16}$ dan $\frac{5}{16}$. Maka rata-rata banyaknya gambar adalah

$$(0) \left(\frac{4}{16} \right) + (1) \left(\frac{7}{16} \right) + (2) \left(\frac{5}{16} \right) = 1,06.$$

Ada beberapa sifat yang berguna untuk menyederhanakan perhitungan nilai harapan dan variansi peubah acak diskrit.

Teorema 13 (Walpole, 2005, hal. 142)

Jika a dan b konstanta, maka

$$\bar{y}_{X+b} = a\bar{x} + b = a\bar{x} + b. \quad (2.18)$$

Teorema 14 (Walpole, 2005, hal. 144)

Nilai harapan jumlah dua atau lebih peubah acak sama dengan jumlah nilai harapan masing-masing peubah. Jadi,

$$\bar{y}_{X+Y} = \bar{x} + \bar{y}. \quad (2.20)$$

g. Variansi Peubah Acak Diskrit

Rataan atau nilai harapan suatu peubah acak X mempunyai peran khusus dalam statistika karena menggambarkan letak pusat distribusi peluang. Akan tetapi, rata-rata itu sendiri tidaklah memberikan keterangan cukup mengenai bentuk distribusinya. Keragaman distribusi perlu dicirikan, karena pentingnya dalam statistika maka diberi nama variansi peubah acak X atau variansi distribusi peluang X dan dinyatakan dengan $V(X)$ atau σ^2_X atau σ^2 .

Definisi 15 (Walpole, 2005, hal. 138)

Misalkan X adalah peubah acak diskrit dengan sebaran peluang

X	x_1	x_2	...	x_n
$p(x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	...	$p(x_n)$

maka varians bagi X adalah

$$V(X) = \sigma^2 = E[(X - i)^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - i)^2 p(x_i) \quad (2.22)$$

Contoh 16

Misalkan peubah acak X menyatakan banyaknya mobil yang digunakan untuk keperluan dinas kantor pada setiap hari kerja. Distribusi peluang untuk kantor tersebut dapat dilihat pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Contoh Distribusi Peluang Mobil

x	1	2	3
$f(x)$	0,3	0,4	0,3

Jawab :

$$i = E(X) = (1)(0,3) + (2)(0,4) + (3)(0,3) = 2,0$$

dan

$$\sigma^2 = \sum_{x=1}^3 (x - 2)^2 f(x)$$

$$= (1 - 2)^2(0,3) + (2 - 2)^2(0,4) + (3 - 2)^2(0,3) = 0,6$$

Jadi, variansi banyaknya mobil yang digunakan untuk keperluan dinas adalah 0,6.

Teorema 17 (Walpole dan Myers, 1995, hal. 105)

Variansi peubah acak X adalah

$$\sigma^2 = E(X^2) - i^2. \quad (2.23)$$

Ada beberapa sifat yang berguna untuk menyederhanakan perhitungan variansi pada bab selanjutnya. Salah satu sifat dari variansi dapat dilihat pada Teorema 18.

Teorema 18 (Walpole, 2005, hal. 146)

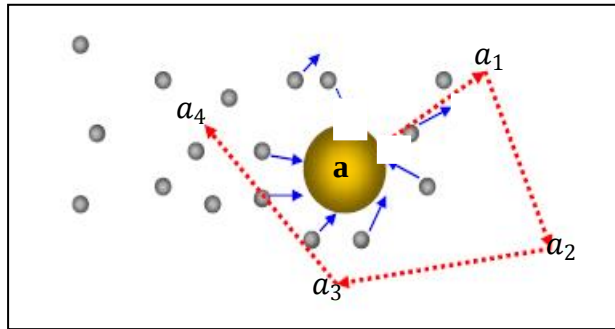
Variansi jumlah dua atau lebih peubah acak yang bebas sama dengan jumlah variansi masing-masing peubah acak. Jadi jika X dan Y bebas, maka

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2. \quad (2.25)$$

h. Gerak Brown (Brownian Motion)

Gerak Brown menurut Zauderer Tahun 1983 adalah gerakan terus menerus dalam suatu pola tak beraturan dari suatu partikel zat cair ataupun gas, artinya partikel-partikel ini tidak pernah dalam keadaan stasioner atau sepenuhnya diam. Hal ini pertama kali dibuktikan dan dicetuskan oleh Robert Brown seorang botanis Skotlandia pada tahun

1827. Brown mengamati beberapa partikel dengan mikroskop dan menemukan bahwa pergerakan terus menerus dari partikel-partikel kecil tersebut makin lama makin cepat bila temperaturnya makin tinggi (Taylor dan Karlin, 1998).



Gambar 1. Skema dari Gerak Brown (Sumber :Ahmadi, 2002)

Gambar 1 merupakan skema dari Gerak Brown. Misalkan partikel a yang terlihat pada gambar tersebut, bergerak naik kekanan (a_1), turun kekanan (a_2), turun ke kiri (a_3), dan naik ke kiri (a_4) yang ditunjukkan dengan anak panah merah secara acak. Hal tersebut menunjukkan partikel-partikel zat cair ataupun gas bergerak terus menerus secara acak atau tidak beraturan.

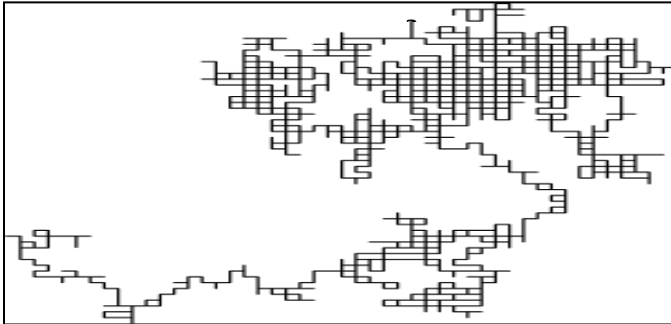
i. Model Kac Walks

Model Kac Walks atau Model *Random Walks* menurut Zauderer pada Tahun 1983 merupakan gerakan partikel yang bergerak dengan kecepatan tertentu dan aspek peluang digunakan untuk mengetahui perubahan arah kecepatan yang bergantung pada posisi awal partikel dan posisi saat itu.

Random Walks memiliki beberapa aturan yang harus dipenuhi berkaitan dengan langkah yang akan ditempuh selanjutnya yaitu :

1. Terdapat titik awal (*starting point*).
2. Penentuan titik berikutnya dilakukan dengan acak dan tidak ada satu peluang yang lebih dibandingkan dengan yang lain. Dalam artian setiap arah langkah memiliki peluang yang sama.
3. Besarnya tiap langkah adalah sama.

Aturan yang telah dijelaskan sebelumnya dapat digambarkan pada Gambar 2.2. Misalkan ada sebuah titik awal yang disebut a dan partikel mulai bergerak dari titik tersebut kebawah, kekiri pada gambar, turun kebawah, kekiri, naik keatas dan seterusnya dengan memiliki peluang arah langkah dan besar tiap langkah adalah sama.

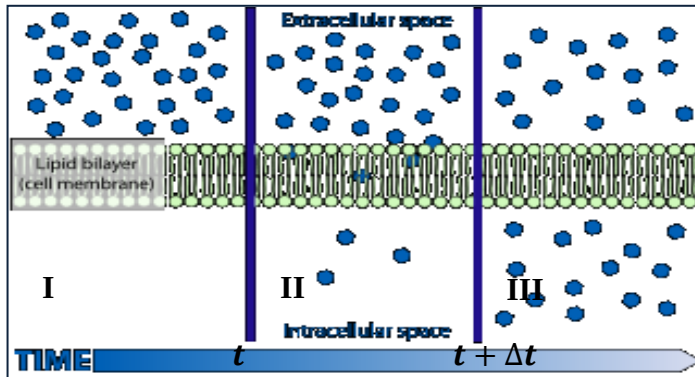


Gambar 2. Skema Model Kac Walks (Sumber : Wikipedia-Random Walks, 2013)

j. Difusi

Difusi menurut Holman Tahun 1994 adalah peristiwa mengalirnya atau berpindahnya suatu [zat](#) dalam pelarut dari bagian yang berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah. Pada umumnya, difusi disebabkan oleh adanya gradien konsentrasi pada komponen ke arah yang menyamakan konsentrasi dan menghapuskan gradien. Dengan kata lain, difusi akan terus terjadi hingga seluruh partikel tersebar luas secara merata atau mencapai keadaan [setimbang](#). Walaupun penyebab proses difusi, biasanya adalah gradien konsentrasi namun proses difusi dapat pula terjadi karena adanya gradien tekanan, gradien suhu, medan gaya, dan lain sebagainya (McCabe dkk, 1990).

Salah satu contoh proses difusi dapat dilihat pada Gambar 3, menggambarkan mengenai pergerakan partikel yang berpindah melewati membran sel. Misalkan I adalah daerah pertama, II adalah daerah kedua dan III adalah daerah ketiga, maka dapat dilihat pergerakan partikel yang berpindah melewati membran sel pada setiap daerah. Pada daerah pertama belum terjadi perpindahan partikel sepanjang waktu t , sedangkan daerah kedua sudah mulai terjadi perpindahan partikel dari ruang luar sel ke bagian dalam sel sepanjang waktu $t + \Delta t$ dan daerah ketiga sudah terjadi kesetimbangan antara ruang sel luar dan sel dalam.



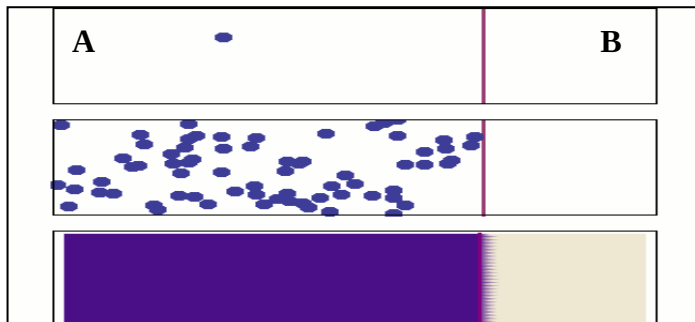
Gambar 3. Proses Difusi pada Membran Sel (Sumber : Wikipedia-Difusi, 2013).

Difusi dapat dimodelkan atau dinyatakan dalam bahasa matematika. Menurut Holman Tahun 1994, persamaan difusi dapat dibentuk dengan menggunakan Hukum Fick tentang difusi yang menyatakan bahwa fluks massadari suatu bahan terlarut per satuan luas berbanding lurus dengan gradien suhu. Jadi,

$$J = -D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (2.28)$$

dengan D adalah fluks massa per satuan waktu, D adalah koefisien difusi, c adalah konsentrasi massa dan tanda negative menunjukkan bahwa bahan terlarut dari tempat yang berkonsentrasi tinggi ke tempat berkonsentrasi rendah.

Proses difusi secara umum yang digambarkan dari hukum Fick, dapat dilihat pada Gambar 4. Suatu zat akan berpindah dari bagian berkonsentrasi tinggi (A) ke bagian yang berkonsentrasi rendah (B) hingga berhenti proses difusi karena sudah dalam keadaan setimbang.



Gambar 4. Proses Difusi Secara Umum (Sumber : Wikipedia-Fick Laws of Diffusion, 2013).

Pada suatu periode Δt , perubahan konsentrasi harus sama dengan jumlah netto fluks yang masuk selama periode tersebut. Sehingga,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} J = 0 \quad (2.29)$$

Jika (2.28) disubstitusikan ke (2.29), maka diperoleh

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-D \frac{\partial c}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.30)$$

Jika (2.30) disederhanakan, maka diperoleh

$$\frac{\partial c}{\partial t} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0 \quad (2.31)$$

Jika masing-masing ruas pada (2.31) ditambahkan dengan $D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$, maka diperoleh

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (2.32)$$

Persamaan (2.32) merupakan persamaan difusi, dengan c adalah konsentrasi massa, t adalah waktu, D adalah koefisien difusi dan x adalah posisi.

k. Model Kac Walks untuk Memperoleh Persamaan Difusi Dimensi Satu

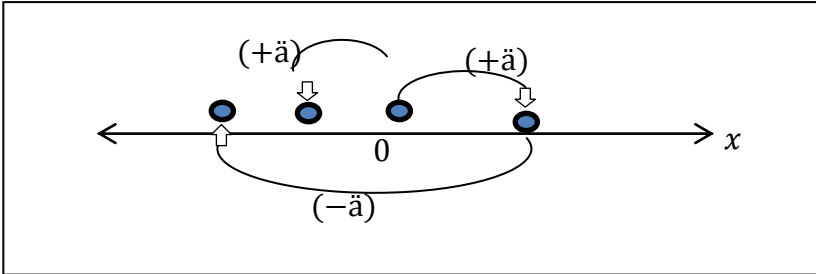
Persamaan difusi menurut Zauderer Tahun 1983, dapat dibentuk juga dengan menggunakan Model Kac Walks yang pergerakan partikelnya ditentukan dengan menggunakan aspek peluang. Berikut ini akan dibahas secara singkat mengenai bagaimana cara penurunan Model Kac Walks untuk memperoleh persamaan difusi dimensi satu dan penjelasan lebih jelasnya akan dibahas pada bab III, sekaligus akan mencari persamaan difusi dimensi dua.

1. Asumsi pergerakan partikel.

Misalkan sebuah partikel bergerak mulai dari titik awal 0 pada garis bilangan real dan melakukan gerak acak yang dapat dilihat pada Gambar 3.1, dengan asumsi pergerakan partikel, yaitu

1. akan bernilai positif apabila partikel bergerak kekanan saat langkah ke- i .
2. akan bernilai negatif apabila partikel bergerak ke kiri saat langkah ke- i .

3. Setiap langkah tidak bergantung satu sama lain sehingga x adalah iid (*independent and identically distributed*) peubah acak.



Gambar 5. Pergerakan Partikel pada Dimensi Satu

2. Identifikasi pergerakan partikel secara probabilistik.

Misalkan peluang partikel bergerak ke kanan (p) dan ke kiri (q), maka berdasarkan (2.16) peluang Bergeraknya adalah

$$Prob(x_i = \Delta x) = P(x_i = \Delta x) = p \text{ dan } P(x_i = -\Delta x) = q.$$

3. Pembentukan persamaan difusi dimensi satu.

Berdasarkan asumsi yang telah dibuat dan peluang pergerakan partikel yang telah dinyatakan sebelumnya, sehingga tahapan selanjutnya persamaan difusi dimensi satu dapat dibentuk dengan menggunakan distribusi peluang, yaitu distribusi binomial dan menggunakan perluasan Teorema Deret Taylor.

Distribusi peluang $v(x, t)$ yang memenuhi persamaan diferensi adalah

$$v(x, t + \Delta t) = pv(x - \Delta x, t) + qv(x + \Delta x, t) \quad (2.33)$$

Pernyataan ini menyatakan bahwa peluang partikel di titik x pada saat waktu $t + \Delta t$ sama dengan peluang partikel di titik $x - \Delta x$ pada waktu t dikalikan dengan peluang p ketika bergerak ke kanan ditambahkan dengan peluang partikel di titik $x + \Delta x$ pada waktu t dikalikan dengan peluang q ketika bergerak ke kiri.

Selanjutnya dengan menggunakan perluasan Deret Taylor, sehingga diperoleh

$$\left. \begin{aligned} v(x, t + \Delta t) &= v(x, t) + \Delta t v_t(x, y, t) + O(\Delta t^2) \\ v(x \pm \Delta x, t) &= v(x, t) \pm \Delta x v_x(x, t) + \frac{1}{2} \Delta x^2 v_{xx}(x, t) + O(\Delta x^3) \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Jika (2.34) disubstitusi ke (2.33), maka diperoleh

$$v_t(x, t) = \left[(q - p) \frac{\ddot{a}}{\hat{o}} \right] v_x(x, t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{a}^2}{\hat{o}} \right) v_{xx}(x, t) + O(\hat{o}) + O\left(\frac{\ddot{a}^3}{\hat{o}}\right) \quad (2.35)$$

Jika $\ddot{a} \rightarrow 0$ dan $\hat{o} \rightarrow 0$, maka (2.35) dapat menjadi

$$v_t(x, t) = -c v_x(x, t) + \frac{1}{2} D v_{xx}(x, t)$$

atau

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -c \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.36)$$

Persamaan (2.36) menurut Zauderer Tahun 1983 merupakan persamaan difusi dimensi satu.

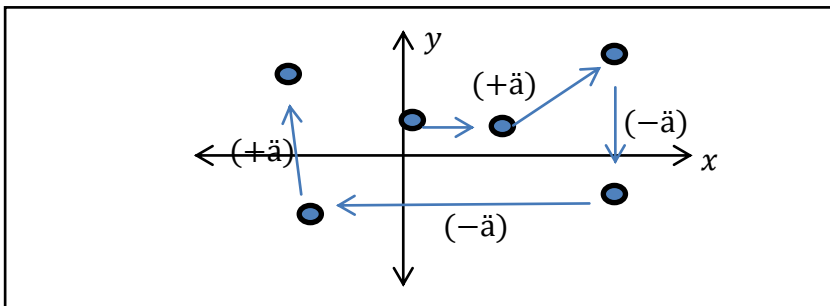
B. TEMUAN DAN PEMBAHASAN

A. Pergerakan Partikel

Model Kac Walkspada dasarnya menggunakan Gerak Brown, yaitu pergerakan partikel-partikel yang bergerak terus menerus dalam suatu pola tak beraturan dengan kecepatan tertentu. Pada Model Kac Walks perubahan arah kecepatan partikel tidak dapat diketahui. Oleh karena itu, digunakan peluang untuk menentukan perubahan arah kecepatan partikel.

Misalkan sebuah partikel bergerak mulai dari titik awal 0 pada garis bilangan real dan melakukan gerak acak yang dapat dilihat pada Gambar 3.1, dengan asumsi pergerakan partikel, yaitu

1. $\ddot{a}$ akan bernilai positif apabila partikel bergerak kekanan atau ke atas saat langkah ke- i .
2. $\ddot{a}$ akan bernilai negatif apabila partikel bergerak kekiri atau ke bawah saat langkah ke- i .
3. Setiap langkah tidak bergantung satu sama lain sehingga x adalah iid (*independent and identically distributed*) peubah acak.



Gambar 6. Pergerakan Partikel pada Dimensi Dua**B. Identifikasi Pergerakan Partikel Secara Probabilistik**

Misalkan peluang partikel bergerak kekanan atau ke atas (p) dan kekiri atau ke bawah (q), maka berdasarkan (2.16) peluang Bergeraknya adalah

$$Prob(x_i = \ddot{a}) = P(x_i = \ddot{a}) = p \text{ dan } P(x_i = -\ddot{a}) = q \quad (3.1)$$

Misalkan posisi partikel pada langkah 1 adalah x_1 , posisi partikel pada langkah 2 adalah x_2 , posisi partikel pada langkah i adalah x_i , dan seterusnya sampai posisi partikel pada langkah n adalah x_n , maka posisi partikel pada saat langkah ke- n adalah

$$X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_i + \cdots + x_n \quad (3.2)$$

atau

$$X_n = \sum_{i=1}^n (x_i) \quad (3.3)$$

dengan $n \in \mathbb{N}$.

Karena adanya pergerakan partikel yang terus menerus dan pergerakan dari partikel-partikel dapat menyebar kemana-mana, maka distribusi peluang perlu digunakan dalam kasus Model Kac Walks. Distribusi peluang yang digunakan adalah distribusi binomial. Hal ini dikarenakan peluang partikel ditentukan dari dua kejadian yang saling melengkapi seperti kirikan.

a. Pembentukan Persamaan Difusi Dimensi Dua

Pembentukan persamaan difusi dimensi dua membutuhkan persamaan yang diperoleh dari nilai harapan dan variansi. Nilai harapan dan variansi mempunyai peran khusus dalam distribusi peluang. Nilai harapan dapat menggambarkan letak pusat distribusi peluang dan variansi menggambarkan keragaman distribusi peluang.

Nilai harapan dari (3.2) yang dinotasikan dengan $E(X)$, ditentukan oleh posisi partikel pada langkah ke- n , sedangkan variansi dari (3.2) yang dinotasikan dengan $V(X)$ digunakan untuk mengukur berapa banyak partikel tersebar disekitar area.

Nilai harapan dari peubah acak diskrit X yang mengasumsikan nilainya x dengan peluang $p(x)$ berdasarkan (2.17), didefinisikan sebagai berikut :

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) \quad (3.4)$$

Nilai harapan dari peubahacak x_i , dapat diperoleh dengan menggunakan (3.4), asumsi 1 dan 2 sehingga diperoleh

$$E(x_i) = (+\ddot{a})P(x_i = \ddot{a}) + (-\ddot{a})P(x_i = -\ddot{a}) \quad (3.5)$$

Jika (3.1) disubstitusi ke (3.5), maka diperoleh

$$E(x_i) = \ddot{a}p - \ddot{a}q$$

atau

$$E(x_i) = (p - q)\ddot{a} \quad (3.6)$$

Karena $E(x)$ adalah fungsi linear dari x dan partikel bergerak terus menerus, maka langkah ke- n dari (3.6) dapat dinyatakan sebagai

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^n E(x_i)$$

atau

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^n ((p - q)\ddot{a}) \quad (3.7)$$

Jika (3.7) diselesaikan dengan menggunakan (2.1), maka diperoleh

$$E(X_n) = (p - q)\ddot{a}n \quad (3.8)$$

Jika $p = q = \frac{1}{2}$ pada (3.8) berdasarkan (2.15) mengenai total peluang, maka peluang partikel yang bergerak ke kanan atau ke kiri adalah sama. Sehingga diperoleh $E(X_n) = 0$. Jika $p > q$, maka peluang partikel bergerak ke kanan lebih besar dari peluang partikel bergerak ke kiri dan jika $p < q$, maka peluang partikel bergerak ke kiri lebih besar dari peluang partikel bergerak ke kanan.

Variansi peubah acak X berdasarkan (2.23) dinyatakan dalam bentuk :

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \bar{x}^2 \quad (3.9)$$

Karena $X_n = \sum_{i=1}^n (x_i)$ dari (3.3), berarti

$$V(X_n) = V(\sum_{i=1}^n (x_i)) \quad (3.10)$$

Karena (2.25) dan asumsi 3, maka (3.10) dapat ditulis

$$V(X_n) = \sum_{i=1}^n V(x_i) \quad (3.11)$$

Jika (3.9) disubstitusi ke (3.11), maka

$$V(X_n) = \sum_{i=1}^n [E(X^2) - \bar{x}^2] \quad (3.12)$$

Nilai dari $E(X^2)$ dapat diperoleh dengan cara serupa yang digunakan untuk memperoleh (3.6), yaitu

$$E(X^2) = (+\ddot{a})^2 P(x_i = \ddot{a}) + (-\ddot{a})^2 P(x_i = -\ddot{a}) \quad (3.13)$$

Karena $P(x_i = \ddot{a}) = p$ dan $P(x_i = -\ddot{a}) = q$, berarti (3.13) dapat menjadi

$$E(X^2) = \ddot{a}^2(p) + \ddot{a}^2(q)$$

atau

$$E(X^2) = (p + q)\ddot{a}^2 \quad (3.14)$$

Karena (2.6) yang menyatakan total peluang adalah 1, berarti $p + q = 1$. Sehingga (3.14) dapat menjadi

$$E(X^2) = \ddot{a}^2 \quad (3.15)$$

Jika (3.15) dan (3.6) disubstitusi ke (3.12), maka diperoleh

$$V(X_n) = \sum_{i=1}^n [\ddot{a}^2 - (p - q)^2 \ddot{a}^2]$$

atau

$$V(X_n) = \sum_{i=1}^n [\ddot{a}^2(1 - (p - q)^2)] \quad (3.16)$$

Jika $(p - q)^2 = p^2 - 2pq + q^2$, maka (3.16) menjadi

$$V(X_n) = \sum_{i=1}^n [\ddot{a}^2(1 - (p^2 - 2pq + q^2))] \quad (3.17)$$

Jika (3.17) ditambah $4pq$ dan dikurangi $4pq$, maka dapat ditulis

$$V(X_n) = \sum_{i=1}^n [\ddot{a}^2(1 - (p^2 - 2pq + q^2 + 4pq - 4pq))] \quad (3.18)$$

Jika suku-suku yang sama pada (3.18) digabungkan dan dijadikan kuadrat sempurna, maka diperoleh

$$V(X_n) = \sum_{i=1}^n [\ddot{a}^2(1 - ((p^2 + 2pq + q^2) - 4pq))] \quad (3.19)$$

Jika $p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2$, maka (3.19) dapat menjadi

$$V(X_n) = \sum_{i=1}^n [\ddot{a}^2(1 - ((p + q)^2 - 4pq))] \quad (3.20)$$

Karena $p + q = 1$, berarti (3.20) dapat ditulis sebagai berikut:

$$V(X_n) = \sum_{i=1}^n [\ddot{a}^2(1 - (1 - 4pq))] \quad (3.21)$$

atau

$$V(X_n) = \sum_{i=1}^n [\ddot{a}^2(1 - 1 + 4pq)]$$

atau

$$V(X_n) = \sum_{i=1}^n [\ddot{a}^2(4pq)] \quad (3.21)$$

Jika (3.21) diselesaikan dengan menggunakan (2.1), maka diperoleh

$$V(X_n) = 4pq\ddot{a}^2n \quad (3.22)$$

Persamaan (3.22) merupakan variansi dari peubah acak x .

Selanjutnya akan dibahas tentang masalah Model Kac Walks yang digunakan untuk simulasi pengamatan pergerakan partikel sehingga diperoleh peluang partikel di titik x pada saat t . Menurut Zauderer pada Tahun 1983, Masalah Model Kac Walks dapat ditemui pada percobaan sebuah partikel yang dicelupkan atau dimasukkan ke dalam zat cair atau gas yang rata-rata posisi partikel perunit waktu adalah c sedangkan variansi daerah pengamatan $D > 0$. Jika diasumsikan r adalah tabrakan

partikel perunit waktu setelah langkah ke- r , maka (3.8) dan (3.22) dapat menjadi

$$(p - q)\ddot{a}r \approx c \quad (3.23)$$

$$4pq\ddot{a}^2r \approx D \quad (3.24)$$

Karena pergerakan partikel kontinu, maka dapat diselidiki limitnya saat panjang langkah $\ddot{a} \rightarrow 0$ dan banyaknya langkah $r \rightarrow \infty$. Sedemikian sehingga c dan D ditentukan dengan limit. Jika $p \neq q$ dan $p - q$ tidak cenderung menuju ke nol saat $\ddot{a} \rightarrow 0$ dan $r \rightarrow \infty$, maka (3.23) menjadi

$$\ddot{a}r \rightarrow \frac{c}{p - q}$$

Akibatnya

$$4pq\ddot{a}^2r \rightarrow \left(\frac{4cpq}{p-q}\right)\ddot{a}, \text{ karena } \ddot{a} \rightarrow 0, \text{ maka } \left(\frac{4cpq}{p-q}\right)\ddot{a} \rightarrow 0$$

Akan tetapi, $4pq\ddot{a}^2r$ harus menuju ke $D \neq 0$. Sehingga

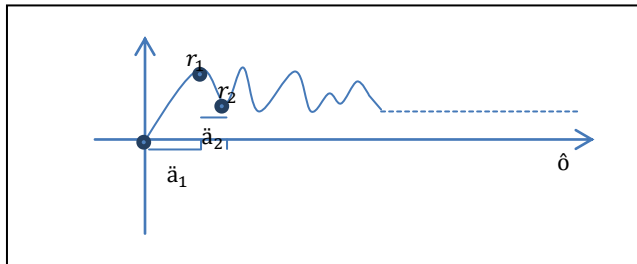
$$\lim_{\substack{\ddot{a} \rightarrow 0 \\ r \rightarrow \infty}} 4pq\ddot{a}^2r = D, \text{ dengan } D \neq 0$$

Oleh karena itu,

$$\lim_{(p-q) \rightarrow 0} \left(\frac{4cpq}{p-q}\right)\ddot{a} = D.$$

Jika $p = q = \frac{1}{2}$ dalam model diskrit, maka diperoleh $c = 0$. Tetapi jika $p - q \neq 0$ maka $c \neq 0$, menunjukkan sebuah partikel bergerak ke kanan atau ke kiri tergantung pada c .

Langkah-langkah r terjadi dalam satuan waktu, setiap panjang langkah atau jarak $\ddot{a}$ harus terjadi dalam $\frac{1}{r} = \hat{\delta}$ unit waktu sedangkan n langkah terjadi pada $\frac{n}{r} = n\hat{\delta}$ unit waktu, seperti yang terlihat pada Gambar 3.2. Untuk menggambarkan pergerakan partikel yang dimulai di titik $x = 0$ pada saat $t = 0$, digunakan Model Kac Walks untuk mendapatkan peluang bahwa partikel ada di posisi x pada waktu t .



Gambar 7. Langkah Pergerakan Partikel

Misalkan didapatkan n langkah perpindahan partikel, sehingga

$$X_n = x \text{ dan } \hat{n} = t$$

Jika $x > 0$ maka diperoleh

$$X_n = k\hat{n} = x \text{ dan } \hat{n} = t$$

dengan k adalah jumlah langkah yang diambil ke kanan dan ke kiri. Pernyataan $k < 0$ berlaku jika $x < 0$. Sehingga didefinisikan,

$$v(x, t) = P(X_n = x) \text{ pada waktu } t = n\hat{\delta} \quad (3.25)$$

dengan $v(x, t)$ adalah peluang pergerakan partikel di titik x pada saat t .

Persamaan (3.25) merupakan peluang partikel yang terletak di titik x yang terjadi pada saat t . Hal ini dapat menentukan suatu pernyataan untuk $v(x, t)$ secara eksplisit dengan menggunakan distribusi binomial. Jika suatu limit yang kontinu dari masalah Model Kac Walks saat $\hat{\delta} \rightarrow 0$ dan $\hat{n} \rightarrow \infty$, maka dibangun persamaan diferensi yang dipenuhi oleh $v(x, t)$. Persamaan diferensi tidak dapat diselesaikan tetapi dapat menunjukkan suatu limit kontinu cenderung ke suatu persamaan diferensial parsial yang menjadi model untuk Gerak Brown dari suatu partikel.

Selanjutnya akan dibahas tentang distribusi peluang dan perluasan Teorema Deret Taylor yang digunakan untuk memperoleh persamaan difusi dimensi dua.

Distribusi peluang $v(x, t)$ yang memenuhi persamaan diferensi adalah

$$v(x, t + \hat{\delta}) = pv(x - \hat{\delta}, t) + qv(x + \hat{\delta}, t) \quad (3.26)$$

Misalkan partikel berpindah dari titik (x, y) ke $(x \pm \hat{\delta}, y)$ dan $(x, y \pm \hat{\delta})$ dan $D = \lim_{\hat{\delta} \rightarrow 0} \left(\frac{\hat{\delta}^2}{2\hat{\delta}} \right)$, maka (3.26) dapat menjadi,

$$v(x, y, t + \hat{\delta}) = [pv(x - \hat{\delta}, y - \hat{\delta}, t) + qv(x + \hat{\delta}, y + \hat{\delta}, t)] \quad (3.27)$$

dan dengan menggunakan Teorema (2.8.1), yang menyatakan bahwa

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ &\quad + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \\
& \quad + (x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\
& + \frac{1}{2}(y - y_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) + R_2
\end{aligned}$$

dapat diperoleh,

$$\begin{aligned}
v(x \pm \ddot{a}, y \pm \ddot{a}, t) = & v(x, y, t) \pm \ddot{a}v_x(x, y, t) \pm \ddot{a}v_y(x, y, t) + \\
& \frac{1}{2}\ddot{a}^2 v_{xx}(x, y, t) + \ddot{a}^2 v_{xy}(x, y, t) + \\
& \frac{1}{2}\ddot{a}^2 v_{yy}(x, y, t) + O(\ddot{a}^3) \quad (3.28)
\end{aligned}$$

dan

$$v(x, y, t + \delta) = v(x, y, t) + 2\delta v_t(x, y, t) + O(\delta^2) \quad (3.29)$$

Jika (3.28) dan (3.29) disubstitusikan ke (3.27), maka

$$\begin{aligned}
v(x, y, t) + 2\delta v_t(x, y, t) + O(\delta^2) \\
= [p(v(x, y, t) - \ddot{a}v_x(x, y, t) - \ddot{a}v_y(x, y, t) \\
+ \frac{1}{2}\ddot{a}^2 v_{xx}(x, y, t) + \ddot{a}^2 v_{xy}(x, y, t) \\
+ \frac{1}{2}\ddot{a}^2 v_{yy}(x, y, t) + O(\ddot{a}^3))] \\
+ [q(v(x, y, t) + \ddot{a}v_x(x, y, t) \\
+ \ddot{a}v_y(x, y, t) \\
+ \frac{1}{2}\ddot{a}^2 v_{xx}(x, y, t) + \ddot{a}^2 v_{xy}(x, y, t) \\
+ \frac{1}{2}\ddot{a}^2 v_{yy}(x, y, t) + O(\ddot{a}^3))] \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, $v(x, y, t) = v$ sehingga (3.30) menjadi

$$\begin{aligned}
v + 2\delta v_t + O(\delta^2) = & [p(v - \ddot{a}v_x - \ddot{a}v_y + \frac{1}{2}\ddot{a}^2 v_{xx} + \ddot{a}^2 v_{xy} + \frac{1}{2}\ddot{a}^2 v_{yy} \\
& + O(\ddot{a}^3))] + [q(v + \ddot{a}v_x + \ddot{a}v_y + \frac{1}{2}\ddot{a}^2 v_{xx} \\
& + \ddot{a}^2 v_{xy} \\
& + \frac{1}{2}\ddot{a}^2 v_{yy} + O(\ddot{a}^3))]
\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
 v + 2\hat{o}v_t + O(\hat{o}^2) &= [pv - p\ddot{a}v_x - p\ddot{a}v_y + \frac{1}{2}p\ddot{a}^2v_{xx} + p\ddot{a}^2v_{xy} \\
 &+ \frac{1}{2}p\ddot{a}^2v_{yy} \\
 &+ pO(\ddot{a}^3)] + [qv + q\ddot{a}v_x + q\ddot{a}v_y + \frac{1}{2}q\ddot{a}^2v_{xx} \\
 &+ q\ddot{a}^2v_{xy} \\
 &+ \frac{1}{2}q\ddot{a}^2v_{yy} + qO(\ddot{a}^3)] \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Jika suku-suku yang sama di ruas kanan digabungkan dan karena $p + q = 1$, maka (3.31) dapat menjadi

$$\begin{aligned}
 v + 2\hat{o}v_t + O(\hat{o}^2) &= [v + (q - p)\ddot{a}v_x + (q - p)\ddot{a}v_y + \frac{1}{2}\ddot{a}^2v_{xx} + \ddot{a}^2v_{xy} \\
 &+ \frac{1}{2}\ddot{a}^2v_{yy} + O(\ddot{a}^3)] \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

Kedua ruas dari (3.32) Jika dikurangi dengan v dan $O(\hat{o}^2)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 2\hat{o}v_t &= (q - p)\ddot{a}v_x + (q - p)\ddot{a}v_y + \frac{1}{2}\ddot{a}^2v_{xx} + \ddot{a}^2v_{xy} + \frac{1}{2}\ddot{a}^2v_{yy} \\
 &+ O(\ddot{a}^3) \\
 &- O(\hat{o}^2) \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Jika suku-suku yang sama di ruas kanan digabungkan dan kedua ruas dibagi dengan $2\hat{o}$, maka diperoleh

$$v_t = (q - p) \frac{\ddot{a}}{2\hat{o}} (v_x + v_y) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}^2}{2\hat{o}} (v_{xx} + v_{yy}) + \frac{\ddot{a}}{2\hat{o}} v_{xy} + O\left(\frac{\ddot{a}^3}{2\hat{o}}\right) - O\left(\frac{\hat{o}}{2}\right) \quad (3.34)$$

Karena $\ddot{a} \rightarrow 0$ dan $\hat{o} \rightarrow 0$, maka (3.34) dapat menjadi

$$\begin{aligned}
 v_t &= \lim_{\substack{\hat{o} \rightarrow 0 \\ \ddot{a} \rightarrow 0}} [(q - p) \frac{\ddot{a}}{2\hat{o}} (v_x + v_y) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}^2}{2\hat{o}} (v_{xx} + v_{yy}) + \frac{\ddot{a}}{2\hat{o}} v_{xy} \\
 &+ O\left(\frac{\ddot{a}^3}{2\hat{o}}\right) - O\left(\frac{\hat{o}}{2}\right)] \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

Misalkan $D = \lim_{\substack{\hat{o} \rightarrow 0 \\ \ddot{a} \rightarrow 0}} \left(\frac{\ddot{a}^2}{2\hat{o}}\right)$, maka (3.35) dapat menjadi

$$v_t = \frac{1}{2} D (v_{xx} + v_{yy}) \quad (3.36)$$

dengan

v : Peluang pergerakan partikel. x, y : Posisi partikel.

t : Waktu. D : Koefisien difusi.

Persamaan (3.36) menurut Zauderer Tahun 1983 disebut dengan persamaan difusi dimensi dua.

C. SIMPULAN

Kesimpulan dari penelitian ini adalah Model Kac Walks yang pada dasarnya menggunakan Gerak Brown dapat digunakan untuk memperoleh persamaan difusi dimensi dua. Metode yang digunakan adalah dengan mengasumsikan pergerakan partikel, mengidentifikasi pergerakan partikel secara probabilistik karena pergerakan partikel tersebut menggunakan distribusi peluang yang salah satunya adalah distribusi binomial dan tahapan terakhir adalah pembentukan persamaan difusi dimensi dua dengan menerapkan teori dari distribusi peluang dan perluasan Teorema Deret Taylor terlebih khusus untuk kasus dua variabel. Sehingga diperoleh persamaan

$$v_t = \frac{1}{2} D(v_{xx} + v_{yy})$$

yang menurut Zauderer Tahun 1983 merupakan persamaan difusi dimensi dua.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmadi, G. 2002. **Brownian Motion**,
http://web2.clarkson.edu/projects/fluidflow/courses/me637/2_Brownian.pdf.
(26 Oktober 2013)
- Boyce, W.E., dan R.C.DiPrima. 2005. **Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems, Eighth Edition**. John Wiley & Sons, Inc. New York.
- Budhi, W.S. 2001. **Kalkulus Peubah Banyak dan Penggunaannya**. ITB. Bandung.
- Cahyono, E., dan Kartono. 2006. **Singularitas Jumlah Solusi Fundamental Persamaan Difusi dalam Pemodelan Transfer Massa**. Jurnal Matematika, 9(2) : 200-206.
- Eckstein, E.C., J.A. Goldstein, dan M. Leggas. 1999. **The Mathematics of Suspensions: Kac Walks and Asymptotic Analyticity**. Electronic Journal of Differential Equations.
- Haryanto, B. 2008. **Pengaruh Pemilihan Kondisi Batas, Langkah Ruang, Langkah Waktu, dan Koefisien Difusi pada Model Difusi**. Jurnal "APLIKA", 8(1): 1-7.
- Hasan, M.I. 2008. **Pokok-Pokok Materi Statistika 2 (Statistika Inferensiaf)**, Edisi Kedua. PT Bumi Aksara. Jakarta.
- Holman, J.P. 1994. **Perpindahan Kalor**. E. Jasjfi, penerjemah. Erlangga. Jakarta.

- Kreyszig, E.1993.**Matematika Teknik Lanjutan**. Bambang Sumantri, penerjemah. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.
- Marsden, J.E., A.J.Tromba, dan A. Weinstein. 2000. **Basic Multivariable Calculus**. W.H.Freeman & Company. New York.
- Mattjik, A. A., dan I. M. Sumertajaya. 2011. **Sidik Peubah Ganda dengan Menggunakan SAS**.IPB PRESS. Bogor.
- McCabe, W. L., J. C. Smith, dan P. Harriott. 1990. **Operasi Teknik Kimia Jilid 2**. E. Jasjfi, penerjemah. Erlangga. Jakarta.
- Purcell, E.J., D. Varberg, dan S.E.Rigdon. 2003. **Kalkulus Jilid 1**. I Nyoman Susila, penerjemah.Erlangga. Jakarta.
- Purcell, E.J., D. Varberg, dan S.E. Rigdon. 2003. **Kalkulus Jilid 2**. Julian Gressando, penerjemah. Erlangga. Jakarta.
- Taylor, H.M., dan S. Karlin. 1998. **An Introduction to Stochastic Modeling**. Academic Press. California.
- Walpole, Ronald E. 2005. **Pengantar Statistika**. Bambang Sumantri, penerjemah. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.
- Walpole, R.E., dan R.H Myers. 1995. **Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan**.RK Sembiring, penerjemah. ITB. Bandung.
- Wikipedia. 2013. **Difusi**.<http://en.wikipedia.org/wiki/Difusi>.(28 September 2013)
- Wikipedia.2013. **Fick Laws of Diffusion**.
http://en.wikipedia.org/wiki/Fick%27s_laws_of_diffusion.(26 Oktober 2013)
- Wikipedia. 2013. **Random Walks**. http://en.wikipedia.org/wiki/Random_walk. (23 Oktober 2013)
- Yulianti, K. 2009. **Pemodelan Difusi Oksigen di Jaringan Tubuh dengan Konsumsi Oksigen Linier Terhadap Konsentrasi**.
<http://matematika.upi.edu/wp-content/uploads/2011/02/artikel-difusi-upi092.pdf>(26 Oktober 2013)
- Zauderer, E. 1983.**Partial Differential Equation of Applied Mathematics**.John Wiley & Sons. New York.