

TEOREMA KEKONVERGENAN FUNGSI TERINTEGRAL HENSTOCK-KURZWEIL SERENTAK DAN FUNGSI BERSIFAT LOCALLY SMALL RIEMANN SUMS (LSRS) DARI RUANG EUCLID \mathfrak{R}^n KE RUANG BARISAN ℓ^p , ($1 \leq p < \infty$)

Aniswita¹

Abstract: In this paper we discuss Henstock Equi α -integrable and Uniformly Locally Small Riemann Sums (UESRS) properties for Henstock-Kurzweil integrable functions from the Euclidean spaces \mathfrak{R}^n into the Sequences space ℓ^p , ($1 \leq p < \infty$)

Keywords: Henstock Equi α -integrable, Uniformly Locally Small Riemann Sums (UESRS) and Henstock-Kurzweil integrable functions from the Euclidean spaces \mathfrak{R}^n into the Sequences space ℓ^p , ($1 \leq p < \infty$)

A. PENDAHULUAN

Pada tahun 1960, Henstock dan Kurzweil secara terpisah mengitlakan integral Riemann dengan mengubah konstanta δ menjadi fungsi positif δ dan ternyata integral yang di susun ekuivalen. Oleh karena itu integral tersebut dikenal dengan integral Henstock-Kurzweil atau integral Riemann yang diperluas (Gordon, 1994).

Integral ini mendapat perhatian yang sangat besar dari para peneliti, berbagai penelitian dilakukan untuk menggali sifat-sifat dan aplikasinya. Diantara sifat tersebut adalah sifat *Locally Small Riemann Sums* (LSRS) Pengertian LSRS untuk fungsi bernilai Real pada himpunan bilangan Real yang terintegral Henstock diberikan dan dibukukan oleh Lee (1989). Indrati (2002) mengitlakkanya untuk fungsi bernilai real pada ruang

¹ STAIN Bukit Tinggi, Indonesia, anesa.mq81@gmail.com

Euclide berdimensi n , kemudian Suherman (2003) mengembangkannya untuk fungsi bernilai vektor pada ruang Euclide berdimensi n , sedangkan untuk fungsi bernilai barisan ℓ^p , ($1 \leq p < \infty$) dikembangkan oleh Aniswita (2006).

Berdasarkan uraian diatas akan diselidiki teorema kekonvergenan fungsi terintegral Henstock serentak dengan fungsi yang bersifat *Locally Small Riemann Sums* (LSRS) dari ruang Euclide \mathfrak{R}^n ke ruang barisan ℓ^p , ($1 \leq p < \infty$).

Himpunan semua bilangan real dinotasikan dengan \mathfrak{R} . Untuk bilangan asli n , \mathfrak{R}^n menyatakan himpunan semua pasangan atas n bilangan real, yaitu

$$\mathfrak{R}^n = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \dots \times \mathfrak{R}. \text{ (n factor)} = \{ \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathfrak{R} \text{ dan } 1 \leq i \leq n \}.$$

Untuk titik $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$, persekitaran (neighborhood) titik \bar{x} dengan jari-jari $r > 0$, dinotasikan dengan $B(\bar{x}, r)$ dan didefinisikan

$$B(\bar{x}, r) = \{ \bar{y} : \bar{y} \in \mathfrak{R}^n \text{ dan } \|\bar{x} - \bar{y}\|_\infty < r \}.$$

Untuk ($1 \leq p < \infty$), ℓ^p merupakan koleksi semua barisan $\bar{x} = \{x_k\} \in W$

sehingga $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ atau ditulis,

$$\ell^p = \left\{ \bar{x} = \{x_k\} \in W, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}. \text{ (Kreyszig, E, 1978).}$$

Perlu diperhatikan bahwa fungsi $\bar{f} : E \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \ell^p$ merupakan barisan fungsi $\{f_k\}$ dengan $f_k : E \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, untuk setiap k ($k = 1, 2, 3, \dots$) sehingga $\bar{f}(\bar{x}) = \{f_k(\bar{x})\} \in \ell^p$ untuk setiap $\bar{x} \in E$.

Selanjutnya jika \bar{f}, \bar{g} fungsi dari $E \subset \mathfrak{R}^n$ ke ℓ^p didefinisikan nilai fungsi $k\bar{f}$ dan $\bar{f} + \bar{g}$ sebagai berikut

(i) $(k\bar{f})(\bar{x}) = k\bar{f}(\bar{x})$, untuk setiap $\bar{x} \in E$ dan k suatu skalar.

(ii) $(\bar{f} + \bar{g})(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}) + \bar{g}(\bar{x})$, untuk setiap $\bar{x} \in E$.

Untuk setiap $\bar{f} = \{f_k\}$ dan $\bar{g} = \{g_k\}$, untuk setiap $k \in N$ didefinisikan

(i) $\bar{f} = \bar{g}$ jika dan hanya jika $f_k = g_k$, yaitu $f_k(\bar{x}) = g_k(\bar{x})$, untuk setiap $\bar{x} \in E$ dan setiap $k \in N$.

(ii) $\bar{f} < \bar{g}$ jika dan hanya jika $f_k < g_k$, yaitu $f_k(\bar{x}) < g_k(\bar{x})$, untuk setiap $\bar{x} \in E$ dan setiap $k \in N$.

(iii) $\bar{f} \leq \bar{g}$ jika dan hanya jika $f_k \leq g_k$, yaitu $f_k(\bar{x}) \leq g_k(\bar{x})$, untuk setiap $\bar{x} \in E$ dan setiap $k \in N$.

Berikut ini diberikan definisi kekonvergenan barisan fungsi.

Diberikan fungsi $\bar{f}_n, \bar{f} : E \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \ell^p$ untuk setiap $n \in N$.

i) Barisan fungsi $\{\bar{f}_n\}$ dikatakan **konvergen** ke fungsi \bar{f} pada E , ditulis dengan $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = \bar{f}$ atau $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x})$, jika untuk setiap $\bar{x} \in E$ barisan $\{\bar{f}_n(\bar{x})\}$ konvergen ke $\bar{f}(\bar{x})$, yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $\bar{x} \in E$ terdapat bilangan asli $m = m(\varepsilon, \bar{x})$ sehingga jika $n \geq m$ berakibat $\|\bar{f}_n(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{x})\|_p < \varepsilon$.

ii) Barisan fungsi $\{\bar{f}_n\}$ dikatakan **konvergen seragam** ke fungsi \bar{f} pada E jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $m = m(\varepsilon)$ sehingga jika $n \geq m$ berakibat $\|\bar{f}_n(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{x})\|_p < \varepsilon$, untuk setiap $\bar{x} \in E$.

Selanjutnya karena sel E tertutup dan terbatas maka sel E merupakan himpunan kompak sehingga untuk setiap barisan fungsi yang konvergen pada sel E merupakan barisan fungsi yang konvergen seragam pada sel yang sama.

Berikut diberikan definisi, sifat dasar dan sifat lanjut dari integral Henstock dari ruang Euclide \mathfrak{R}^n ke ruang barisan ℓ^p , ($1 \leq p < \infty$).

Definisi 1.1 Diberikan fungsi volume α pada \mathfrak{R}^n dan $E \subset \mathfrak{R}^n$ sel. Fungsi $\bar{f} : E \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \ell^p$ dikatakan terintegral Henstock pada E , ditulis dengan $\bar{f} \in R^*(E, \ell^p, \alpha)$ jika terdapat $\bar{a} = \{a_k\} \in \ell^p$ dengan sifat untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\} = \{(D_i, \bar{x}_i) : i = 1, 2, \dots, r\}$ pada E berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - \bar{a} \right\|_p = \left\| \sum_{i=1}^r \bar{f}(\bar{x}_i) \alpha(D_i) - \bar{a} \right\|_p < \varepsilon$$

Selanjutnya nilai $\bar{a} = \{a_k\} \in \ell^p$ yang dimaksud di atas disebut nilai integral- α Henstock fungsi \bar{f} pada E di tulis dengan $\bar{a} = (R^*) \int_E \bar{f} d\alpha$.

Definisi 1.2 Diberikan fungsi volume α pada \mathfrak{R}^n , $E \subset \mathfrak{R}^n$ sel, dan fungsi $f_k : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ untuk setiap k , ($k=1,2, \dots$). Barisan fungsi $\{f_k\}$ dikatakan terintegral- α Henstock serentak (Henstock Equi α -integrable) pada E dengan F_k sebagai primitifnya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{ \{D, \bar{x}\} \}$ pada E berlaku $\left| \left(\mathcal{D} \right) \sum f_k(\bar{x}) \alpha(D) - F_k(E) \right| < \varepsilon$, untuk setiap k .

Teorema 1.3 (Kriteria Cauchy) Diberikan fungsi volume α pada \mathfrak{R}^n dan $E \subset \mathfrak{R}^n$ sel. Fungsi $\bar{f} \in R^*(E, \ell^p, \alpha)$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap dua partisi $\mathcal{D}_1 = \{ \{D_1, \bar{x}\} \}$ dan $\mathcal{D}_2 = \{ \{D_2, \bar{x}\} \}$ pada E berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D}_1 \right) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D_1) - \left(\mathcal{D}_2 \right) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D_2) \right\|_p < \varepsilon$$

Teorema 1.4 (Lemma Henstock) Diberikan fungsi volume α pada \mathfrak{R}^n dan sel $E \subset \mathfrak{R}^n$. Jika $\bar{f} \in R^*(E, \ell^p, \alpha)$ dengan \bar{F} sebagai primitifnya, yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{ \{D, \bar{x}\} \}$ pada E berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - \bar{F}(E) \right\|_p < \varepsilon, \text{ maka untuk setiap jumlah bagian } \sum_1 \text{ dari } \left(\mathcal{D} \right) \sum \text{ berlaku } \left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum_1 \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - \bar{F}(E) \right\|_p < 2\varepsilon.$$

Teorema 1.5 (Peluasan Harnack) Diberikan fungsi volume α pada \mathfrak{R}^n , sel $E \subset \mathfrak{R}^n$, dan fungsi $\bar{f} : E \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \ell^p$. Himpunan X merupakan

himpunan tertutup di dalam E dan $\{E_i\}$ merupakan barisan himpunan tertutup sederhana yang tidak saling tumpang-tindih dengan

$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E \setminus X$. Jika $\bar{f} \in R^*(X, \ell^p, \alpha)$ dan $\bar{f} \in R^*(E_i, \ell^p, \alpha)$, untuk

setiap i dengan $\left\| \sum_{i=1}^{\infty} (R^*) \int_{E_i} \bar{f} d\alpha \right\|_p < \infty$ maka

$$\bar{f} \in R^*(E, \ell^p, \alpha) \text{ dan } (R^*) \int_E \bar{f} d\alpha = (R^*) \int_X \bar{f} \chi_X d\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} (R^*) \int_{E_i} \bar{f} d\alpha.$$

Akibat 1.6 (Sifat Cauchy) Diberikan fungsi volume α pada \mathfrak{R}^n , sel $E \subset \mathfrak{R}^n$, dan fungsi $\bar{f} : E \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \ell^p$. Barisan $\{E_i\}$ merupakan barisan himpunan sederhana yang tidak saling tumpang-tindih dengan

$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E^0$, dengan E^0 menyatakan himpunan titik-dalam (interior

point) sel E . Jika $\bar{f} \in R^*(E_i, \ell^p, \alpha)$, untuk setiap i dengan

$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} (R^*) \int_{E_i} \bar{f} d\alpha \right\|_p < \infty$ maka $\bar{f} \in R^*(E, \ell^p, \alpha)$ dan

$$(R^*) \int_E \bar{f} d\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} (R^*) \int_{E_i} \bar{f} d\alpha$$

B. TEMUAN DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang beberapa teorema kekonvergenan diantaranya yaitu kekonvergenan terintegral serentak dan teorema kekonvergenan fungsi yang memiliki sifat *Uniformly Locally Small Riemann Sums (ULSRS)*.

Definisi 2.1 Diberikan fungsi volume α pada \mathfrak{R}^n , sel $E \subset \mathfrak{R}^n$, dan fungsi $\bar{f}_k : E \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \ell^p$ untuk setiap k , ($k=1,2,\dots$). Barisan fungsi $\{\bar{f}_k\}$ dikatakan **terintegral- α serentak** (Henstock Equi α -integrable) pada sel E jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{D, \bar{x}\}$ pada E berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) - \left(R^* \right) \int_E \bar{f}_k(\bar{x}) d\alpha \right\|_p < \varepsilon$$

untuk setiap k .

Definisi 2.2 Diberikan fungsi volume α pada \mathfrak{R}^n , sel $E \subset \mathfrak{R}^n$ dan fungsi

$\bar{f}_k : E \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \ell^p$ untuk setiap $k, (k=1, 2, 3, \dots)$.

Barisan fungsi terukur $\{\bar{f}_k\}$ bersifat LSRS seragam atau *Uniformly Locally Small Riemann Sums (ULSRS)* pada sel $E \subset \mathfrak{R}^n$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap $\bar{y} \in E$ dan untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{D, \bar{x}\}$ pada sel $C \subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$ dan $\bar{y} \in C$ berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p < \varepsilon$$

untuk setiap k .

Lemma 2.3 Jika Barisan fungsi terukur $\{\bar{f}_k\}$ bersifat LSRS seragam pada sel $E \subset \mathfrak{R}^n$ dan $\bar{f}_k \rightarrow \bar{f}$ h.d. pada sel E maka fungsi \bar{f} bersifat LSRS.

Bukti:

Tanpa mengurangi arti dapat dianggap bahwa $\bar{f}_k \rightarrow \bar{f}$ pada sel E , karena jika \bar{f} fungsi terintegral Henstock pada sel E dan $\bar{g} = \bar{f}$ h.d. pada sel E maka \bar{g} terintegral Henstock, lebih lanjut \bar{g} merupakan fungsi bersifat LSRS pada sel E .

Jadi $\bar{f}_k \rightarrow \bar{f}$ berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $\bar{x} \in E$ terdapat bilangan positif $k_{0,\bar{x}}$ dengan sifat untuk setiap $k \geq k_{0,\bar{x}}$ berlaku

$$\left\| \bar{f}_k(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{x}) \right\|_p < \frac{\varepsilon}{2^k \alpha(E)}$$

Barisan fungsi terukur $\{\bar{f}_k\}$ bersifat LSRS seragam pada sel $E \subset \mathfrak{R}^n$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap $\bar{y} \in E$ berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p < \varepsilon$$

untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{ \langle D, \bar{x} \rangle \}$ pada sel $C \subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$ dan $\bar{y} \in C$ untuk setiap k . Lebih lanjut untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{ \langle D, \bar{x} \rangle \}$ pada sel E , cacah titik terkait adalah hingga. Dengan demikian menurut lemma Henstock, untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{ \langle D, \bar{x} \rangle \}$ pada sel $C \subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$ dan $\bar{y} \in C$ berlaku

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p &\leq \\ \left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p &+ \left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \right\|_p \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Dengan $k = \max \{ k_{0, \bar{x}} : \bar{x} \in D \}$ □

Teorema 2.4 Jika Barisan fungsi terukur $\{ \bar{f}_k \}$ adalah barisan fungsi terintegral Henstock serentak pada sel $E \subset \mathfrak{R}^n$ dan $\bar{f}_k \rightarrow \bar{f}$ h.d. pada sel E untuk $k \rightarrow \infty$ maka \bar{f} terintegral Henstock pada sel E dan $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(R^* \right) \int_E \bar{f}_k d\alpha = \left(R^* \right) \int_E \bar{f} d\alpha$.

Bukti:

Tanpa mengurangi arti dianggap $\bar{f}_k \rightarrow \bar{f}$ pada sel E . Berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $\bar{x} \in E$ terdapat bilangan positif $k_{\bar{x}}$ dengan sifat untuk setiap $k \geq k_{\bar{x}}$ berlaku

$$\left\| \bar{f}_k(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{x}) \right\|_p < \frac{\varepsilon}{\alpha(E)}$$

Barisan fungsi terukur $\{ \bar{f}_k \}$ adalah barisan fungsi terintegral Henstock serentak pada sel $E \subset \mathfrak{R}^n$ sehingga terdapat fungsi positif δ pada sel E dengan sifat untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{ \langle D, \bar{x} \rangle \}$ pada E berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) - \left(R^* \right) \int_E \bar{f}_k d\alpha \right\|_p < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \text{ untuk setiap } k$$

Cacah titik terkait untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{ \{D, \bar{x}\} \}$ pada E adalah hingga maka dapat diambil $K = \max\{k_x^- : \bar{x} \in D\}$.

Dengan demikian untuk $k, m \geq N$ diperoleh

$$\begin{aligned} & \left\| \left(R^* \right) \int_E \bar{f}_k d\alpha - \left(R^* \right) \int_E \bar{f}_m d\alpha \right\|_p \leq \\ & \left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) - \left(R^* \right) \int_E \bar{f}_k d\alpha \right\|_p \\ & \left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) - \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}_m(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p + \\ & \left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}_m(\bar{x}) \alpha(D) - \left(R^* \right) \int_E \bar{f}_m d\alpha \right\|_p \\ & \leq \sum \frac{\varepsilon}{2^k} + \left(\mathcal{D} \right) \sum \left\| \bar{f}_k(\bar{x}) - \bar{f}_m(\bar{x}) \right\|_p \alpha(D) + \sum \frac{\varepsilon}{2^k} \\ & < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\alpha(E)} \sum \alpha(D) + \varepsilon = 3\varepsilon \end{aligned}$$

Jadi $\{ \bar{f}_k \}$ merupakan barisan Cauchy, akibatnya $\{ \bar{f}_k \}$ konvergen, katakan ke \bar{a} . Berarti terdapat bilangan positif k_0 dengan sifat untuk setiap $k \geq k_0$ berlaku

$$\left\| \left(R^* \right) \int_E \bar{f}_k d\alpha - \bar{a} \right\|_p < \varepsilon$$

Untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{ \{D, \bar{x}\} \}$ pada E diambil $K = \max\{k_0, k_x^- : \bar{x} \in D\}$ maka untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{ \{D, \bar{x}\} \}$ pada E berlaku

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - \bar{a} \right\|_p \leq \\ & \left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_{p,+} \\ & \left\| \left(\mathcal{D} \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) - \left(R^* \right) \int_E \bar{f}_k d\alpha \right\|_{p,+} \left\| \left(R^* \right) \int_E \bar{f}_k - \bar{a} \right\|_p \\ & < 3\varepsilon . \end{aligned}$$

Dengan kata lain terbukti \bar{f} terintegral Henstock pada sel E dan $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(R^* \right) \int_E \bar{f}_k d\alpha = \left(R^* \right) \int_E \bar{f} d\alpha$.

Teorema 2.5 Jika Barisan fungsi terukur $\{ \bar{f}_k \}$ bersifat LSRS seragam pada sel $E \subset \mathfrak{R}^n$ maka $\{ \bar{f}_k \}$ terintegral Henstock serentak pada sel E .

Bukti:

Diketahui Barisan fungsi terukur $\{ \bar{f}_k \}$ bersifat LSRS seragam pada sel E , berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ_* pada E dengan sifat untuk setiap $\bar{y} \in E$ dan untuk setiap partisi Perron δ_* -fine $\mathcal{D}_* = \{ \{ D, \bar{x} \} \}$ pada sel $C \subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$ dan $\bar{y} \in C$ berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D}_* \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p < \varepsilon ,$$

untuk setiap k .

Barisan fungsi terukur $\{ \bar{f}_k \}$ konvergen h.d. pada sel E sehingga menurut Teorema Egoroff terdapat himpunan terbuka O dengan $\alpha(O) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ dengan sifat $\{ \bar{f}_k \}$ konvergen seragam pada $E \setminus O$. Jadi terdapat bilangan positif K_0 dengan sifat untuk setiap $k \geq K_0$ berlaku

$$\left\| \bar{f}_k(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{x}) \right\|_p < \frac{\varepsilon}{7\alpha(D)} , \text{ untuk setiap } \bar{x} \in E \setminus O .$$

Untuk setiap k , $\bar{f}_k \in R^*(E, \ell^p, \alpha)$ sehingga terdapat fungsi positif δ_k pada sel E dengan sifat untuk setiap dua partisi δ_k -fine $\mathcal{D}_k^1, \mathcal{D}_k^2$ pada E berlaku

$$\left\| \left(\mathcal{D}_k^1 \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) - \left(\mathcal{D}_k^2 \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p < \frac{\varepsilon}{7}$$

Diambil fungsi positif δ pada sel E dengan

$$\delta(\bar{x}) = \begin{cases} \min \{ \delta_*(\bar{x}), \delta_1(\bar{x}), \dots, \delta_{K_0}(\bar{x}) \}, & \text{untuk setiap } \bar{x} \in E \setminus O \\ \min \{ \delta_*(\bar{x}), \delta_1(\bar{x}), \dots, \delta_{K_0}(\bar{x}), d(\bar{x}, \delta(O)) \}, & \text{untuk setiap } \bar{x} \in O \end{cases}$$

Maka untuk setiap dua partisi δ -fine $\mathcal{D}^1, \mathcal{D}^2$ pada E

1. Jika $k < K_0$ diperoleh

$$\left\| \left(\mathcal{D}^1 \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) - \left(\mathcal{D}^2 \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p < \frac{\varepsilon}{7}$$

2. Jika $k \geq K_0$

$$\left\| \left(\mathcal{D}^1 \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) - \left(\mathcal{D}^2 \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p < \frac{\varepsilon}{7}$$

\leq

$$\left\| \left(\mathcal{D}^1 \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) - \left(\mathcal{D}^1 \right) \sum \bar{f}_{K_0}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p +$$

$$\left\| \left(\mathcal{D}^1 \right) \sum \bar{f}_{K_0}(\bar{x}) \alpha(D) - \left(\mathcal{D}^2 \right) \sum \bar{f}_{K_0}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p +$$

$$\left\| \left(\mathcal{D}^2 \right) \sum \bar{f}_{K_0}(\bar{x}) \alpha(D) - \left(\mathcal{D}^2 \right) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p +$$

$$< \left(\mathcal{D}^1 \right) \sum_{\bar{x} \in E \setminus O} \left\| \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) - \bar{f}_{K_0}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p + \frac{\varepsilon}{7} +$$

$$\left\| \left(\mathcal{D}^1 \right) \sum_{\bar{x} \in O} \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p + \left\| \left(\mathcal{D}^1 \right) \sum_{\bar{x} \in O} \bar{f}_{K_0}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p +$$

$$\left(\mathcal{D}^2 \right) \sum_{\bar{x} \in E \setminus O} \left\| \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) - \bar{f}_{K_0}(\bar{x}) \alpha(D) \right\|_p +$$

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\mathcal{D}^1 \right) \sum_{x \in O} \bar{f}_k(x) \alpha(D) \right\|_p + \left\| \left(\mathcal{D}^1 \right) \sum_{x \in O} \bar{f}_{K_0}(x) \alpha(D) \right\|_p \\ & < \frac{\varepsilon}{7} + \frac{\varepsilon}{7} + \frac{\varepsilon}{7} + \frac{\varepsilon}{7} + \frac{\varepsilon}{7} + \frac{\varepsilon}{7} + \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi terbukti jika barisan fungsi terukur $\{\bar{f}_k\}$ bersifat LSRS seragam pada sel E maka $\{\bar{f}_k\}$ terintegral Henstock serentak pada sel E .

Teorema 2.6 Jika Barisan fungsi terukur $\{\bar{f}_k\}$ bersifat LSRS seragam pada sel $E \subset \mathfrak{R}^n$ dan $\bar{f}_k \rightarrow \bar{f}$ h.d. pada sel E untuk $k \rightarrow \infty$ maka fungsi \bar{f} terintegral Henstock pada sel E dan $\lim_{k \rightarrow \infty} (R^*) \int_E \bar{f}_k d\alpha = (R^*) \int_E \bar{f} d\alpha$.

Bukti:

Lemma 2.3 mengakibatkan fungsi \bar{f} bersifat LSRS pada sel E dan sesuai dengan Teorema 2.5 diperoleh fungsi \bar{f} terintegral Henstock pada sel E dan dengan menggunakan Teorema 2.4 dan Teorema 2.5 diperoleh $\lim_{k \rightarrow \infty} (R^*) \int_E \bar{f}_k d\alpha = (R^*) \int_E \bar{f} d\alpha$.

C. SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa fungsi yang terintegral Henstock dari ruang Euclide \mathfrak{R}^n ke ruang barisan ℓ^p , ($1 \leq p < \infty$).

Permasalahan-permasalahan lain yang perlu dikembangkan antara lain kajian mengenai teorema kekonvergenan Globally Small Riemann Sums fungsi yang terintegral Henstock dari ruang Euclide \mathfrak{R}^n ke ruang Barisan ℓ^p , ($1 \leq p < \infty$) serta aplikasinya pada disiplin ilmu lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Gordon, R. A, 1994, *The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*, American Mathematical Society, USA
- Indrati, Ch. R, 2002, *Integral Henstock-Kurzweil di Dalam Ruang Euclide Berdimensi- n*, Disertasi, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
- Kreyszig, E, 1978, *Introduction Functional Analysis with Application*, John Wiley and Sons

- Lee, P. Y, 1989, *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, Word Scientific, Singapore.
- Pfeffer, W. F, 1993, *The Riemann Approach to Integration*, Cambridge University Press, New York, USA
- Royden, H. L, 1989, *Real Analysis*, third edition, Macmillan Publishing Company, New York, USA