

KEMAMPUAN BERFIKIR FORMAL MAHASISWA

Muhammad Syawahid¹

Abstrak: salah satu tujuan pembelajaran matematika adalah agar peserta didik memiliki kemampuan penalaran. Kemampuan penalaran merupakan kemampuan menghubungkan fakta-fakta untuk memperoleh informasi. Kemampuan penalaran ini melibatkan kemampuan logis yang menuntut siswa menyelesaikan suatu persoalan dengan logika kebenaran yang sesuai. Kemampuan berfikir formal merupakan wujud dari kemampuan penalaran yaitu kemampuan untuk membuktikan kebenaran pernyataan dengan menggunakan aksioma, definisi atau teorema yang sudah berlaku. Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan kemampuan berfikir formal mahasiswa dalam mata kuliah analisis real. Jenis penelitian dalam penelitian ini adalah penelitian deskriptif. Instrumen yang digunakan adalah instrumen tes yang memuat pertanyaan pembuktian. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kemampuan berfikir formal rata-rata mahasiswa yang menempuh mata kuliah analisis real termasuk dalam kategori cukup. Mahasiswa dengan kemampuan tinggi memiliki kemampuan berfikir formal yang baik dan didukung dengan kemampuan analisis yang baik sedangkan mahasiswa dengan kemampuan rendah memiliki kemampuan berfikir formal yang cukup baik akan tetapi memiliki kemampuan analisis yang kurang.

Kata Kunci: *kemampuan berfikir formal; penalaran*

A. PENDAHULUAN

Undang-undang nomor 20 tahun 2003 tentang sistem pendidikan nasional dinyatakan bahwa pendidikan adalah usaha sadar dan terencana untuk mewujudkan suasana belajar dan proses pembelajaran agar peserta didik secara aktif mengembangkan potensi dirinya untuk memiliki kekuatan spiritual keagamaan, pengendalian diri, kepribadian, kecerdasan, akhlak mulia, serta keterampilan yang diperlukan dirinya, masyarakat, bangsa dan negara. Wujud dari pengamalan undang-undang

¹ IAIN Mataram, Mataram, Indonesia,

tersebut adalah keterlaksanaan proses pembelajaran dilembaga pendidikan, baik pendidikan dasar, menengah maupun tingkat tinggi.

Matematika merupakan salah satu mata pelajaran wajib yang harus ada dalam setiap pembelajaran di sekolah maupun di perguruan tinggi. Hal ini dikarenakan matematika memegang peranan penting dalam kemajuan suatu bangsa. Dalam pembelajaran matematika siswa dituntut untuk memiliki kemampuan berfikir logis, sistematis, kritis dan kreatif. Kemampuan-kemampuan ini merupakan kemampuan dasar yang harus dimiliki dalam pengembangan ilmu pengetahuan.

Tujuan utama pembelajaran matematika adalah untuk membantu siswa mengembangkan kemampuannya dalam mengerjakan dan menyelesaikan permasalahan matematika (NCTM, 2000). Dalam permendiknas nomor 22 tahun 2006 dinyatakan bahwa salah satu tujuan pembelajaran matematika adalah kemampuan penalaran. Keraf (dalam Fajar Shadiq, 2004) menjelaskan bahwa Penalaran merupakan proses berfikir yang menghubungkan fakta-fakta atau evidensi-evidensi yang diketahui menuju suatu kesimpulan. Kesimpulan dari suatu masalah merupakan tujuan yang ingin dicapai dari proses penalaran matematika. Kesimpulan tersebut tidak hanya sekedar melakukan prosedur-prosedur yang sudah biasa atau rutin dilakukan, akan tetapi dalam penalaran, menghubungkan fakta-fakta merupakan bagian penting dalam menghasilkan kesimpulan dari suatu masalah.

Kemampuan penalaran erat kaitannya dengan kemampuan berfikir logik (*logically thinking*). Kemampuan berfikir logic merupakan kemampuan seseorang dalam menyelesaikan masalah tidak hanya berdasar pada prosedur yang ada, akan tetapi memiliki landasan kebenaran yang kuat dari prosedur tersebut. Bagian penting dari kemampuan berfikir logic adalah kemampuan berfikir formal yaitu kemampuan dalam meletakkan dasar kebenaran dari setiap prosedur penyelesaian suatu masalah.

Salah satu pengembangan kemampuan berfikir formal terdapat pada mata kuliah analisis real. Mata kuliah ini merupakan pengembangan pembahasan dari mata kuliah kalkulus yang erat kaitannya dengan bilangan riil. Pada mata kuliah kalkulus, lebih banyak difokuskan pada kemampuan algoritma atau menyelesaikan prosedur tanpa mengetahui kebenaran dari setiap prosedur tersebut. Sedangkan pada mata kuliah

analisis real lebih banyak difokuskan pada kemampuan untuk membuktikan suatu masalah dengan landasan yang kuat seperti berdasar pada aksioma, postulat, sifat, lema, teorema dan lain sebagainya.

Oleh karena itu dalam tulisan ini akan dikaji secara deskriptif mengenai kemampuan berfikir formal mahasiswa pada mata kuliah analisis real.

Kemampuan Berfikir Logis Dan Formal

Berfikir merupakan aktifitas mental dengan menggunakan fiiran untuk memperoleh ide atau gagasan dengan informasi-informasi yang ada. Berfikir dapat dilakukan dengan menghubungkan informasi-informasi dengan permasalahan yang dihadapi. Terdapat beberapa jenis berfikir yaitu berfikir sistematis, berfikir logis, berfikir kritis dan lain sebagainya.

Istilah logis mengacu pada kata logika. Logika sendiri memiliki hubungan yang erat dengan penerimaan akal terhadap suatu kebenaran. Kemampuan berfikir logis sendiri merupakan bagian dari kemampuan penalaran. Keraf (dalam Fajar Shadiq, 2004) menjelaskan bahwa Penalaran merupakan proses berfikir yang menghubungkan fakta-fakta atau evidensi-evidensi yang diketahui menuju suatu kesimpulan. Kesimpulan dari suatu masalah merupakan tujuan yang ingin dicapai dari proses penalaran matematika. Kesimpulan tersebut tidak hanya sekedar melakukan prosedur-prosedur yang sudah biasa atau rutin dilakukan, akan tetapi dalam penalaran, menghubungkan fakta-fakta merupakan bagian penting dalam menghasilkan kesimpulan dari suatu masalah.

NCTM (2000) menyatakan bahwa *"a mathematical proof is a formal way of expressing particular kind of reasoning and justification"*. Maksudnya adalah bahwa pembuktian matematika merupakan bentuk formal dari jenis ekspresi tertentu dari penalaran dan penarikan kesimpulan. Terdapat 4 standar penalaran dan pembuktian menurut NCTM (2000) yaitu:

1. Mengenal penalaran dan pembuktian sebagai aspek fundamental dari matematika
2. Membuat dan menginvestigasi konjektur matematika
3. Mengembangkan dan mengevaluasi argument matematika dan pembuktian
4. Memilih dan menggunakan cara berbeda dalam penalaran dan pembuktian.

Terdapat dua jenis penalaran, yaitu penalaran induktif dan penalaran deduktif. Penalaran induktif merupakan proses penarikan kesimpulan yang berdasarkan pada beberapa kemungkinan yang dimunculkan dari premis-premis (Hurley, 1982). Maksud dari pernyataan tersebut adalah proses menyimpulkan dilakukan dari hal-hal yang umum ke hal yang khusus. Copy (1964) menambahkan bahwa penalaran induktif merupakan proses penalaran yang kesimpulannya diturunkan menurut premis-premisnya dengan suatu probabilitas.

Penalaran deduktif merupakan penarikan kesimpulan yang diturunkan sepenuhnya dari premis-premisnya melalui aturan-aturan penyimpulan (Hurley, 1982). Maksud dari pernyataan tersebut adalah proses penyimpulan dilakukan dari hal-hal khusus ke hal yang umum. Copy (1964) juga menambahkan bahwa penalaran deduktif merupakan proses penalaran dalam penarikan kesimpulan yang konklusinya diturunkan secara mutlak menurut premis-premisnya dan tidak dipengaruhi oleh factor dari luar.

Menurut Suriasumantri (1990) menyatakan bahwa kemampuan berfikir logis merupakan kemampuan menemukan suatu kebenaran berdasarkan pada aturan, pola atau logika tertentu. Bagian terpenting dari kemampuan ini adalah penyelesaian suatu masalah dengan memberikan alasan yang berdasarkan aturan dari setiap prosedur yang dilakukan.

Dalam perkembangan lebih spesifik tentang kemampuan berfikir logis, istilah kemampuan berfikir formal merupakan bagian penting dari kemampuan berfikir logis yang mengacu pada kemampuan memberikan alasan dengan aksoma, definisi, lemma, maupun teorema. Tall (2008e) menyatakan:

While it may be argued that these developments are simply different modes of thinking that grow in sophistication, I have come to describe them as 'three worlds of mathematics' that develop in sophistication in quite different ways.

- *the conceptual-embodied world, based on perception of and reflection on properties of objects, initially seen and sensed in the real world but then imagined in the mind;*
- *the proceptual-symbolic world that grows out of the embodied world through action (such as counting) and is symbolised as thinkable*

concepts (such as number) that function both as processes to do and concepts to think about (procepts);

- *the axiomatic-formal world (based on formal definitions and proof), which reverses the sequence of construction of meaning from definitions based on known objects to formal concepts based on set-theoretic definitions.*

Maksud dari pernyataan tersebut adalah bahwa Tall membagi matematika dalam tiga dunia yaitu:

1. *Dunia perwujudan-konseptual*, berdasarkan persepsi dan refleksi pada sifat-sifat objek, pada awalnya terlihat dan dirasakan dalam dunia nyata tapi kemudian dibayangkan dalam pikiran;
2. *Dunia simbolis-proceptual* yang tumbuh keluar dari dunia perwujudan melalui tindakan (seperti menghitung) dan disimbolkan sebagai konsep masuk akal (seperti angka) yang berfungsi sebagai proses untuk berbuat dan konsep untuk berpikir (prosep);
3. *Dunia formal-aksiomatik* (berdasarkan definisi formal dan bukti), yang membalik urutan konstruksi makna dari definisi yang didasarkan pada objek dikenal menuju konsep formal berdasarkan pada set-teoritik definisi.

Dunia formal-aksimoatik inilah yang merupakan bagian penting dari kemampuan berfikir logis atau yang secara umum dikenal dengan istilah kemampuan berfikir formal. Dengan pengetahuan akan aksoma, definisi, lemma maupun teorema, penyelesaian suatu masalah akan lebih diterima secara logika.

Lebih lanjut Tall (2008x) menyatakan: *"The mental world of formalism that uses (set-theoretic) language for definition of axiomatic systems and deduction by formal proof; this reverses the sequence of construction of meaning from definitions based on known concepts to formal concepts based on set-theoretic definitions"*. Maksudnya adalah dunia mental dari bentuk formal yang menggunakan bahasa untuk sebuah definisi dari sistem aksiomatis dan pengambilan kesimpulan dengan bukti formal. Kebalikan dari pernyataan ini adalah bahwa barisan konstuksi pemaknaan adalah dari definisi berdasar pada pemahaman konsep menuju formal konsel yang berdasar pada definisi atau teori tertentu. Hal ini menunjukkan bahwa kemampuan berfikir formal didasarkan pada

kemampuan pemahaman konsep baik aksioma, definisi maupun teorema-teorema yang ada.

Mata kuliah analisis real merupakan mata kuliah pertama bagi mahasiswa untuk berlatih bernalar dan membuktikan pernyataan matematika secara formal. Mata kuliah ini membekali mahasiswa kemampuan bernalar yang merupakan salah satu dari kemampuan matematika (*mathematic competence*). Pengetahuan procedural mahasiswa yang diperoleh dari mata kuliah Kalkulus 1,2 dan lanjutan akan diperdalam dalam mata kuliah analisis real agar supaya mahasiswa tidak hanya berfikir procedural (*procedural thinking*) akan tetapi juga memiliki kemampuan berfikir logic (*logically thinking*). Materi yang dibahas dalam mata kuliah ini hampir sama dengan materi pada kalkulus 1, yaitu: sistem bilangan real, barisan dan deret bilangan real, Limit Fungsi, Turunan, Integral dan lain sebagainya. Dalam penelitian ini materi dibatasi sampai barisan Cauchy.

Sifat Aljabar Bilangan riil

Sifat aljabar bilangan riil atau aksioma bilangan yang berlaku pada bilangan riil adalah: 1) Sifat tertutup; 2) Sifat komutatif; 3) Sifat asosiatif; 4) Unsur identitas; 5) Invers; dan 6) Distributive

Nilai Mutlak

Nilai mutlak a dari bilangan real a dinotasikan dengan $|a|$ didefinisikan sebagai:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{jika } a > 0 \\ 0 & \text{jika } a = 0 \\ -a & \text{jika } a < 0 \end{cases}$$

Dari definisi diatas dapat juga ditulis $|a| \geq 0$ untuk setiap $a \in R$, $|a| = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$. Dan $|-a| = |a|$ untuk setiap $a \in R$.

Sifat Kelengkapan Bilangan riil

Definisi: misalkan $A \in R, A \neq \emptyset$

- Himpunan A disebut terbatas ke atas jika terdapat $b \in R$ sedemikian sehingga $a \leq b$ untuk setiap $a \in A$. Dalam hal ini b disebut batas atas.
- Himpunan A disebut terbatas ke bawah jika terdapat $c \in R$ sedemikian sehingga $a \geq c$ untuk setiap $a \in A$. Dalam hal ini c disebut batas bawah.
- Himpunan A disebut terbatas jika terbatas ke atas dan terbatas ke bawah.

Definisi Suprimum dan Infimum

Misalkan $S \subseteq R, S \neq \emptyset$.

- a. Jika himpunan S terbatas ke atas maka b disebut suprimum (batas atas terkecil) jika
 - b adalah anggota dari himpunan batas atas S
 - Jika v adalah anggota dari himpunan batas atas S maka $b \leq v$
- b. Jika himpunan S terbatas ke bawah maka c disebut infimum (batas bawah terbesar) jika
 - c adalah anggota dari himpunan batas bawah S
 - Jika u adalah anggota dari himpunan batas bawah S maka $c \leq u$
 - Sifat Kelengkapan
 - Setiap himpunan tak kosong dari bilangan riil yang terbatas ke atas pasti memiliki suprimum
 - Setiap himpunan tak kosong dari bilangan riil yang terbatas ke bawah pasti memiliki infimum

Barisan

Definisi: Barisan X_n memiliki nilai limit a (atau bisa dikatakan barisan X_n konvergen ke a) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \in N$ dengan $n \geq n_0$ berlaku :

$$|X_n - a| < \varepsilon$$

Barisan Cauchy

Definisi: Barisan X_n disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \in N$ dengan $n, m \geq n_0$ berlaku :

$$|X_n - X_m| < \varepsilon$$

B. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif yang bertujuan mendeskripsikan kemampuan berfikir formal mahasiswa pada mata kuliah analisis real. Penelitian ini dilakukan di jurusan tadaris matematika IAIN mataram semester VI tahun akademik 2014/2015. Subjek dari penelitian ini adalah mahasiswa yang mengampu mata kuliah analisis real pada 3 kelas yaitu kelas A sebanyak 30 orang, kelas B sebanyak 23 dan kelas C sebanyak 30 orang.

Instrument yang digunakan adalah instrument tes uraian. Tes uraian uraian tersebut terdiri dari 3 soal yang memuat soal pembuktian dan membutuhkan analisis yang kuat dalam membuktikannya. Soal pertama meminta mahasiswa untuk membuktikan teorema yang berkaitan dengan sistem bilangan real, soal kedua meminta mahasiswa untuk membuktikan dengan definisi barisan akan kebenaran dari kasus suatu barisan, dan soal ketiga meminta siswa untuk membuktikan suatu contoh barisan merupakan barisan Cauchy. Setiap soal memiliki prosedur penyelesaian dan dalam setiap prosedur mahasiswa diharuskan memberikan alasan dari prosedur tersebut.

Hasil dari tes tersebut akan dideskripsikan secara kuantitatif dan beberapa jawaban mahasiswa akan dideskripsikan secara kualitatif. Dalam penelitian ini, dipilih 2 subjek yang dideskripsikan jawabannya yaitu subjek 1 dengan kemampuan tinggi dan subjek 2 dengan kemampuan kurang. Masing-masing soal akan dideskripsikan sesuai dengan jawaban subjek 1 dan subjek 2 untuk melihat kemampuan menganalisis dan kemampuan berfikir formal mahasiswa.

C. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Data kuantitatif yang diperoleh dalam penelitian ini adalah data skor akhir kemampuan berfikir formal dalam hal ini berkaitan dengan pemahaman konsep dalam menyelesaikan soal dengan memberikan alasan dari setiap prosedur atau langkah.

Dari 3 soal yang diberikan kepada masing-masing kelas diperoleh data dengan sebagai berikut.

Tabel 1. Data Kuantitatif Skor Kemampuan Berfikir Formal Mahasiswa semester VI pada Mata Kuliah Analisis Real

No	Kelas	Rata-rata	Skor tertinggi	Skor terendah	Standar deviasi
1	A	53,9	75	30	20,7
2	B	53,3	90	30	19,2
3	C	56,2	100	30	16,6

Dari data tersebut, masing-masing kelas rata-rata memiliki kemampuan berfikir formal yang tidak jauh berbeda dan masuk pada katagori cukup. Dari ketiga kelas tersebut kelas C memiliki standar deviasi yang paling kecil yaitu 16,6 yang menunjukkan kelas C memiliki tingkat homogenitas yang lebih baik dari kelas A dan B.

Untuk data kualitatif, diambil 2 subjek yaitu subjek dengan kemampuan baik dan subjek dengan kemampuan rendah untuk dipaparkan jawaban dari setiap soal yang diberikan. Berikut deskripsi kualitatif dari subjek 1 dan subjek 2.

Untuk soal pertama "Buktikan $-(a + b) = (-a) + (-b)$ ". Beberapa jawaban dari mahasiswa terekam dalam gambar berikut.

Subjek 1

The image shows a handwritten mathematical proof on lined paper. The steps are as follows:

$$\begin{aligned}
 &-(a+b) + (a+b) = 0 \\
 &-(a+b) + (a+b) + (-a+b) = 0 + (-a+b) \\
 &-(a+b) + (a+(-a)) + (-b+b) = 0 + (-a+b) \quad \text{distributif, identitas} \\
 &-(a+b) + 0 + 0 = -a+b \quad \text{invers} \\
 &-(a+b) + 0 = -a+b \\
 &-(a+b) = -a+b \quad \text{identitas} \\
 &\text{Terbukti}
 \end{aligned}$$

Dari jawaban subjek 1 terlihat bahwa beberapa prosedur penyelesaiannya berdasar pada aksioma dasar bilangan rill atau sifat aljabar bilangan rill. Subjek 1 mengawali penyelesaian dengan aksioma unsur identitas bahwa " $-(a + b) + (a + b) = 0$ ", hanya saja pada langkah ini subjek 1 tidak menuliskan alasan langkah tersebut. Selanjutnya pada langkah kedua subjek 1 menjumlahkan setiap ruas dengan $(-a + b)$. Pada langkah ketiga subjek 1 menggunakan sifat distributive, komutatif dan identitas pada langkah kedua. Pada langkah keempat subjek 1 menggunakan sifat invers dan pada langkah kelima subjek 1 menggunakan sifat identitas untuk membuktikan bahwa " $-(a + b) + (a + b) = 0$ ". Dari langkah-langkah yang ditulis oleh subjek 1 tersebut menggambarkan bahwa pemahaman akan sifat-sifat aljabar bilangan rill atau aksioma bilangan rill menjadi dasar dalam membuktikan pernyataan yang diberikan. Pemahaman tersebut dalam beberapa langkah tidak bisa dikomunikasikan dengan baik (tidak ditulis alasan langkah yang dilakukan),

akan tetapi penyelesaian logis dapat dilakukan oleh subjek 1 dalam menyelesaikan soal tersebut.

Subjek 2

1.) di tet: $a, b \in \mathbb{R}$ buktikan $-(a-b) = -a+b$

Jawab:

$$-(a-b) = -a+b$$

$$-1(a-b) = -1 \cdot a + (-1) \cdot (-b) \quad \text{Bersifat linier}$$

$$= -1 \cdot a + (-1) \cdot (-1) \cdot b$$

$$= -a + 1 \cdot b \quad \text{Teorema}$$

$$= -a + b$$

Dari jawaban subjek 2 terlihat prosedur penyelesaiannya tidak berdasar. Subjek 2 mencoba melakukan penalaran induktif yaitu dengan mengambil kesimpulan yang umum untuk dijabarkan ke hal-hal yang khusus. pada langkah pertama subjek 1 menuliskan $-(a-b) = -a+b$ yang merupakan kesimpulan yang ingin dicapai. Pada langkah berikutnya subjek 1 tidak bisa menggunakan sifat aljabar bilangan riil sehingga menyebabkan prosedur atau langkah-langkah yang dilakukan tidak benar.

Untuk soal kedua "Buktikan dengan definisi limit barisan bahwa barisan $x_n := \frac{1-2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$ konvergen ke -2 !". Beberapa jawaban mahasiswa terekam dalam gambar berikut.

Subjek 1

2. Diketahui Lim $\frac{1-2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} = -2$

a. $\left| \frac{1-2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} + 2 \right| = \left| \frac{1-2\sqrt{n}+2\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+1} \right| = \left| \frac{3}{\sqrt{n}+1} \right|$

$$\left| \frac{3}{\sqrt{n}+1} \right| = \frac{3}{\sqrt{n}+1} < \frac{3}{\sqrt{n}}$$

Nilai sebarang $\epsilon > 0$, $\frac{3}{\epsilon} > 0$ maka

Sifat archimedean

$$\frac{3}{\epsilon} \in \mathbb{R}, \quad n_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{dg } n_0 > \frac{3}{\epsilon^2} \quad \text{dg } n \geq n_0$$

$$\left| \frac{3}{n+1} \right| < \epsilon \quad \text{Jadi dari ... 3)}$$

Dari jawaban subjek 1 di atas, terlihat bahwa prosedur atau langkah yang dilakukan berdasar pada definisi limit barisan yang menyatakan bahwa: Barisan X_n memiliki nilai limit a (atau bisa dikatakan barisan X_n konvergen ke a) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \in N$ dengan $n \geq n_0$ berlaku : $|X_n - a| < \varepsilon$. Subjek 1 mengawali langkah kerjanya dengan melakukan analisis pendahuluan (dalam hal ini tidak ditulis dengan jelas bahwa yang dilakukan adalah analisis pendahuluan) dimana subjek 1 menyederhanakan bentuk $\left| \frac{1-2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - 2 \right|$ menjadi $\left| \frac{3}{\sqrt{n+1}} \right|$.

Kemampuan manipulasi variable mampu dilakukan sehingga penyebut dari bentuk mutlak terakhir berupa bilangan. Langkah kedua dilakukan dengan menghubungkan kemampuan pemahaman konsep mutlak dengan konsep urutan bilangan riil sehingga subjek 1 dapat menuliskan $\left| \frac{3}{\sqrt{n}+1} \right|$ yang berarti $\frac{3}{\sqrt{n}+1} < \frac{3}{\sqrt{n}}$. Dengan melakukan analisis pendahuluan tersebut subjek 1 bisa mengambil nilai ε yang tepat yaitu $\varepsilon > \frac{3}{\sqrt{n}}$ atau $n > \frac{3}{\varepsilon^2}$. Pada langkah selanjutnya subjek 1 tinggal menggunakan definisi limit barisan dan menghubungkannya dengan

analisis pendahuluan sehingga diperoleh pernyataan yang sesuai dengan definisi limit barisan yang menghasilkan terbuktinya kebenaran dari pertanyaan tersebut.

Subjek 2

b. Bukti:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \text{ s.t.}$$

$$\left| \frac{1-2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - (-2) \right| < \epsilon.$$

$$\left| \frac{1-2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} + 2 \right| < \epsilon.$$

Analisis pendahuluan.

$$\left| \frac{1-2\sqrt{n}+2\sqrt{n+1}+2}{\sqrt{n+1}} \right| = \left| \frac{3}{\sqrt{n+1}} \right| = \frac{3}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{3}{n}$$

Bukti:

ambil sebarang $\epsilon > 0$ $\frac{3}{\epsilon} > 0$ dan sifat archimedes.

$\frac{3}{\epsilon} \in \mathbb{R}$ pasti ada $n_0 \in \mathbb{N}$ dan $n_0 > \frac{3}{\epsilon}$ dan $n \geq n_0$

$$\frac{3}{\epsilon} < n_0 < n$$

$$\frac{3}{\epsilon} < n$$

$$\frac{3}{n} < \epsilon$$

$$\frac{3}{\sqrt{n+1}} < \frac{3}{n} < \epsilon$$

$$= \frac{3}{\sqrt{n+1}} < \epsilon$$

Dari jawaban subjek 2 terlihat bahwa prosedur yang dilakukan tidak jauh beda dengan subjek 1 yaitu dengan melakukan analisis pendahuluan kemudian bukti formal dengan definisi limit barisan. Subjek 2 melakukan analisis pendahuluan untuk mencari nilai ϵ untuk dapat digunakan pada definisi. Dari analisis pendahuluan subjek 2 menyederhanakan bentuk $\left| \frac{1-2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - (-2) \right|$ menjadi $\frac{3}{\sqrt{n+1}}$. pada pembuktian formal, subjek 2 mampu menggunakan definisi limit barisan akan tetapi terdapat beberapa langkah yang kurang tepat seperti pengambilan nilai ϵ yakni $\frac{3}{\epsilon}$. Pengambilan $\frac{3}{\epsilon}$ tidak

berdasar karena tidak memperhatikan bentuk $\frac{3}{\sqrt{n+1}}$ yang penyebutnya memiliki bentuk akar sehingga akan berdampak pada langkah selanjutnya yang keliru meskipun menggunakan definisi limit barisan.

Untuk soal ketiga "Buktikan bahwa barisan $x_n := \frac{1-2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ adalah barisan Cauchy!". Beberapa jawaban mahasiswa terekam dalam gambar berikut.

Subjek 1

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1-2\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}} - \frac{1-2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right| = \left| \frac{1-2\sqrt{m}+2-2-\frac{1-2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{m+1}} \right| \\
 & \left| \frac{1-2\sqrt{n}+2\sqrt{n}+2}{\sqrt{n+1}} + \frac{2\sqrt{n}+2-1-2\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}} \right| \\
 & = \left| \frac{3}{\sqrt{n+1}} - \frac{3}{\sqrt{m+1}} \right| < \epsilon \\
 & \left| \frac{3}{\sqrt{n+1}} - \frac{3}{\sqrt{m+1}} \right| < \frac{3}{\sqrt{n+1}} + \frac{3}{\sqrt{m+1}} \rightarrow \text{ketaksamaan segitiga} \\
 & \text{dapat diilih } \frac{36}{\epsilon^2} \\
 & \text{Bukti} \\
 & \text{ambil sebarang } \epsilon > 0, \quad \frac{36}{\epsilon^2} > 0, \quad \frac{36}{\epsilon^2} > 0 \\
 & \text{dengan sifat archimedean} \\
 & \exists n_0 > \frac{36}{\epsilon^2}, \quad m, n > n_0 \dots a) \\
 & \text{dari a)} \\
 & \frac{36}{\epsilon^2} < n_0 \leq m, n \dots b) \\
 & \text{dari b)} \\
 & \frac{36}{\epsilon^2} < m, \quad \frac{36}{\epsilon^2} < n \dots c) \\
 & \text{dari c)} \\
 & \frac{36}{m} < \epsilon^2, \quad \frac{36}{n} < \epsilon^2 \\
 & \frac{6}{\sqrt{m}} < \epsilon, \quad \frac{6}{\sqrt{n}} < \epsilon \\
 & \text{dari } \frac{6}{\sqrt{m}} < \epsilon, \text{ domahs } \frac{6}{\sqrt{n+1}} < \epsilon \\
 & \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{n}} < \epsilon, \text{ domahs } \frac{6}{\sqrt{n+1}} < \epsilon
 \end{aligned}$$

dari d. $\left| \frac{1-2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{1-2\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}} \right| =$
 $\frac{6}{\sqrt{m+1}} + \frac{6}{\sqrt{n+1}} < 2\varepsilon.$
 $\frac{3}{\sqrt{m+1}} + \frac{3}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon. \quad \dots \dots (e).$
 dengan ketaksamaan segitiga.
 $\left| \frac{3}{\sqrt{n+1}} - \frac{3}{\sqrt{m+1}} \right| < \frac{3}{\sqrt{n+1}} + \frac{3}{\sqrt{m+1}}$
 dari e, maka
 $\left| \frac{3}{\sqrt{n+1}} - \frac{3}{\sqrt{m+1}} \right| < \frac{3}{\sqrt{n+1}} + \frac{3}{\sqrt{m+1}} < \varepsilon$
 $\left| \frac{3}{\sqrt{n+1}} - \frac{3}{\sqrt{m+1}} \right| < \varepsilon$
 Terbukti

Dari jawaban subjek 1 di atas terlihat bahwa subjek 1 memiliki kemampuan berfikir formal yang baik. Terlihat dari setiap prosedur atau langkah yang dilakukan berdasar pada definisi barisan Cauchy. Langkah pertama subjek 1 melakukan analisis pendahuluan dengan menyederhanakan $\left| \frac{1-2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{1-2\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}} \right|$ menjadi $\left| \frac{3}{\sqrt{n+1}} - \frac{3}{\sqrt{m+1}} \right|$. Pada tahap ini subjek 1 memiliki kemampuan manipulasi yang sangat baik. Pada langkah selanjutnya subjek 1 menggunakan teorema ketaksamaan segitiga untuk menentukan $\left| \frac{3}{\sqrt{n+1}} - \frac{3}{\sqrt{m+1}} \right| \leq \frac{3}{\sqrt{n+1}} + \frac{3}{\sqrt{m+1}}$. Dalam hal analisis subjek 1 memiliki analisis yang kuat sehingga pada analisis pendahuluan subjek 1 memilih $\frac{36}{\varepsilon^2}$. Subjek 1 memiliki sifat kehati-hatian karena memilih $\frac{36}{\varepsilon^2}$ padahal dengan memilih $\frac{6}{\varepsilon^2}$ saja sebenarnya sudah tepat. Pada bukti formal subjek 1 menggunakan definisi barisan Cauchy dengan tepat dengan menghubungkan setiap ketaksamaan yang dihasilkan dengan langkah yang ada pada definisi barisan Cauchy. Hal tersebut membuat jawaban yang dihasilkan memiliki tingkat berfikir formal yang tinggi.

Subjek 2

2) Dik: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{n+1} = -2$

a. buktikan dg definisi limit barisan
 b. buktikan barisan ini juga adalah Cauchy.

Jawab:

b) buktikan $\frac{1-2n}{n+1}$ adalah barisan Cauchy

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $m, n \in \mathbb{N}$ dan $m, n \geq n_0$ berlaku $|x_m - x_n| < \epsilon$

analisis perbedaannya

$$\left| \frac{1-2m}{m+1} - \frac{1-2n}{n+1} \right|$$

$$\left| \frac{1-2m+2n+2}{m+1} - \frac{1-2n+2m+2}{n+1} \right|$$

$$\left| \frac{3}{m+1} - \frac{3}{n+1} \right| < \frac{3}{m+1} + \frac{3}{n+1}$$

pilih $\frac{\epsilon}{6}$:

buktikan formal:

ambil sembarang $\epsilon > 0, \frac{\epsilon}{6} > 0$ yg stat archimedes

$n_0 > \frac{\epsilon}{6}, m, n \geq n_0$

$\frac{\epsilon}{6} < n_0 \leq m, n$

$\frac{\epsilon}{6} < n_0 \leq m+1, n+1$

$\frac{\epsilon}{6} < n+1, \frac{\epsilon}{6} < n+1$

$\frac{\epsilon}{m+1} < \epsilon, \frac{\epsilon}{n+1} < \epsilon$

$\frac{\epsilon}{m+1} + \frac{\epsilon}{n+1} < 2\epsilon$

$6 \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \right) < 2\epsilon$

$3 \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \right) < \epsilon$

$\frac{3}{m+1} + \frac{3}{n+1} < \epsilon$

dua faktor sama positif

$\left| \frac{3}{m+1} - \frac{3}{n+1} \right| < \frac{3}{m+1} + \frac{3}{n+1}$

$\left| \frac{3}{m+1} - \frac{3}{n+1} \right| < \frac{3}{m+1} + \frac{3}{n+1} < \epsilon$

$\left| \frac{3}{m+1} - \frac{3}{n+1} \right| < \epsilon$ terbukti

Dari jawaban subjek 2 di atas terlihat bahwa subjek 2 memiliki kemampuan berfikir formal yang baik. Terlihat dari setiap prosedur atau langkah yang dilakukan berdasar pada definisi barisan Cauchy. Langkah pertama subjek 2 melakukan analisis pendahuluan dengan menyederhanakan $\left| \frac{1-2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} - \frac{1-2\sqrt{m}}{\sqrt{m}+1} \right|$ menjadi $\left| \frac{3}{\sqrt{n}+1} - \frac{3}{\sqrt{m}+1} \right|$. Pada tahap ini subjek 2 memiliki kemampuan manipulasi yang sangat baik. Pada langkah selanjutnya subjek 2 menggunakan teorema ketaksamaan segitiga untuk menentukan $\left| \frac{3}{\sqrt{n}+1} - \frac{3}{\sqrt{m}+1} \right| \leq \frac{3}{\sqrt{n}+1} + \frac{3}{\sqrt{m}+1}$. Dalam hal subjek 2 memiliki analisis yang kurang kuat sehingga pada analisis pendahuluan subjek 2 memilih $\frac{6}{\varepsilon}$. Pada tahap ini subjek 2 tidak memperhatikan bahwa pada ketaksamaan tersebut penyebutnya memiliki bentuk akar. Pada bukti formal sebenarnya subjek 2 sedikit mampu menggunakan definisi barisan Cauchy untuk menyelesaikan soal tersebut akan tetapi kesalahan pada analisis pendahuluan berdampak pada kesalahan pada bukti formal.

Dari deskripsi data kualitatif di atas, subjek dengan kemampuan tinggi maupun rendah pada dasarnya memiliki kemampuan dalam menggunakan definisi, aksioma, dan teorema dalam setiap langkah atau prosedur yang dilakukan dalam menyelesaikan soal tersebut. Perbedaan hasil yang diperoleh pada dasarnya terletak pada perbedaan kemampuan analisis dimana mahasiswa dengan kemampuan tinggi memiliki kemampuan analisis yang kuat sehingga langkah dan kesimpulan yang dihasilkan tepat sedangkan mahasiswa dengan kemampuan rendah memiliki kemampuan analisis yang kurang sehingga hasil yang diperoleh kurang tepat meskipun langkah yang dilakukan sesuai dengan aksioma, definisi maupun teorema yang berlaku.

D. SIMPULAN

Simpulan yang diperoleh dari hasil penelitian ini adalah:

1. Kemampuan berfikir formal mahasiswa pada mata kuliah analisis real masih kurang dan memiliki tingkat homogenitas yang rendah.
2. Mahasiswa dengan kemampuan tinggi memiliki kemampuan berfikir formal yang baik
3. Kemampuan berfikir formal mahasiswa dengan kemampuan rendah cukup baik dan kemampuan analisis yang kurang.

DAFTAR PUSTAKA

- Bartle, R.G & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to Real Analysis: Third Edition*. New York: John Wiley & Son Inc.
- BSNP. (2006). Permendiknas Nomor 22 Tahun 2006 Tentang Standar Isi.
- Copy. (1964). *Reading on Logic*. Macmillan: The Macmillan Company.
- Depdiknas. (2003). Undang-undang Nomor 20 Tahun 2003 tentang Standar Pendidikan Nasional.
- Fadjar, S. (2009). *Kemampuan Matematika*. Yogyakarta: PPG Matematika
- Hurlay. 1982. *Logic*. California: Wadsworth Publishing Company.
- NCTM. (2000). *Principle and Standard for School Mathematics*. Reston:NCTM
- NCTM. (2000). *Curriculum and Evaluation Standard for SchoolMathematic*. Reston. NCTM
- Suriasumantri, J. S. (1990). *Filsafat Ilmu Sebuah Pengantar Populer*, Jakarta:Pustaka Sinar Harapan.
- Tall, D.O. (2008e). *The Transition to Formal Thinking in Mathematics*. *Mathematics Education Research Journal*, 20 (2), 5-24.
- Tall, D.O. (2008x). *The Historical & Individual Development of Mathematical Thinking: Ideas that are Set-Before and Met-Before*. Plenary Presented at Colóquio de História e Tecnologia no Ensino Da Matemática. UFRJ, Rio de Janeiro, Brazil, May 5th.